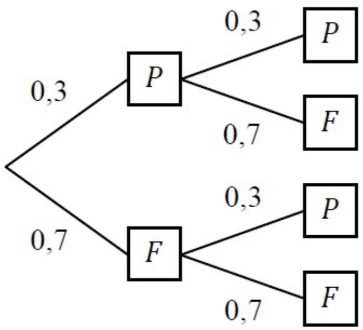
T RH — TD 1 : Lois Binomiales - Correction — Mai 2020

Ex 1 : Loi Binomiale *B*(*n*,*p*) avec *n* assez petit (*n*=2 et *p*=0,3)

Soit la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenus quand on lance deux fois la pièce. Les valeurs possibles de sont 0, 1 ou 2.

On a l'arbre de probabilité suivant :



Probabilité d'obtenir 0 PILE (donc 2 FACES):

$$P(X=0)=P(FF)=0{,}7\times0{,}7=0{,}49$$

Probabilité d'obtenir 1 PILE (donc 1 FACE):

$$P(X=1)=P(PF)+P(FP)=0{,}3\times0{,}7+0{,}7\times0{,}3=0{,}42$$

Probabilité d'obtenir 2 PILES (donc 0 FACE):

$$P(X=2)=P(PP)=0{,}3\times0{,}3=0{,}09$$

On obtient la Loi Binomiale suivante :

k	0	1	2	TOTAL
$P(X=k)$	0,49	0,42	0,09	1

Calcul du nombre moyen de PILES obtenus après 2 lancers :

l'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)\\&=0\times0{,}49+1\times0{,}42+2\times0{,}09\\&=0{,}6\end{aligned}$$

Calcul de l'intervalle de confiance :

la variance de X est donné par :

$$\begin{aligned}V(X)&=0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)+2^2\times P(X=2)-(E(X))^2\\&=0\times0{,}49+1\times0{,}42+4\times0{,}09-(0{,}6)^2\\&=0{,}42\end{aligned}$$

l'écart-type de X est donné par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0{,}42}\simeq0{,}648$$

l'intervalle de confiance de X est donc :

$$\begin{aligned}I&=[E(X)-\sigma(X);E(X)+\sigma(X)]\\&=[0{,}6-0{,}648\,;0{,}6+0{,}648]\\&=[0\,;1{,}248]\end{aligned}$$

Interprétation : après 2 lancers on obtiendra en moyenne entre « 0 PILE » et « 1,248 PILE » d'après l'intervalle de confiance avec une fiabilité de 95%

Ex 2 : Loi Binomiale *B*(*n*,*p*) avec *n* assez grand (*n*=35 et *p*=0,12)

La population française compte 12 % de gauchers. On choisit 35 personnes au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « exactement 5 personnes sont gauchers » ;
- B : « au plus 2 personnes sont gauchers » ;
- C : « il y a plus de 5 gauchers ».

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de gauchers ;

On utilise les paramètres de la calculatrice :

$$\begin{aligned}P(A)&=P(X=5)\\&=binomFdp(35{,}0.12{,}5)\\&\simeq0{,}1745\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(X\leqslant2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=binomFRép(35{,}0.12{,}2)\\&\simeq0{,}192\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(C)&=P(X\geqslant6)=1-P(X\leqslant5)=1-(P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=5))\\&=1-(binomFrép(35{,}0.12{,}5))\\&=1-0{,}762\\&\simeq0{,}238\end{aligned}$$

Calcul du nombre moyen de GAUCHERS obtenus dans cette population de 35 personnes :

l'espérance mathématique de X est : $E(X)=n\times p=35\times0{,}12=4{,}2$

la variance de X est : $V(X)=n\times p\times(1-p)=35\times0{,}12\times0{,}88=3{,}696$

l'écart-type de X est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3{,}696}\simeq1{,}922$

l'intervalle de confiance est : $I=[4{,}2-1{,}922\,;4{,}2+1{,}922]=[2{,}278\,;6{,}122]$

Ainsi, en moyenne cette population aura entre 2,278 gauchers et 6,122 gauchers