1ère spé TD n° 4 : Lois de probabilité 2020

Ex 1 : Une urne contient 5 boules rouges et $(n-5)$ boules noires avec $n \geqslant 5$

Partie A : Tirage avec remise : un joueur tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.

1) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
2) On note A l'événement « les deux boules sont de couleurs différentes ». Calculer $p_n(A)$ (probabilité de A en fonction de n)
3) Déterminer pour quelle valeur de n le joueur a le plus de chances de réaliser A (on étudiera la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\frac{10(x-5)}{x^2}$)

Partie B **:** Tirage sans remise : un joueur tire au hasard successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1) Justifier qu'il y a n^2-n issues possibles.
2) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
3) Déterminer la probabilité $p_n(A)$
4) Le joueur gagne 2€ s'il réalise A et perd 1€ dans le cas contraire. On note X le gain algébrique du joueur.
   a) Donner la loi de probabilité de X
   b) Montrer que $E(X)=\frac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$
   c) Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.

Ex 2 : Une urne contient 1 boule rouge et n boules blanches avec $n \geqslant 1$;
Les boules sont indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne.

- Si elle est rouge, on gagne 10€
- Si elle est blanche, on perd 1€

On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur

1) On suppose dans cette question qu'il y a 10 boules blanches ($n=10$)
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'espérance de X ; ce jeu est-il équitable ?
2) On suppose maintenant que n est un entier positif quelconque.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Exprimer $E(X)$ en fonction de n
   c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X) \geqslant 0$?
   d) Calculer n pour avoir $E(X)=\frac{-1}{2}$

Ex 3 : Un joueur utilise une machine à sous, appelée *ARNAK*, qui fonctionne de la façon suivante.
Le joueur mise 1 euro. Alors, 3 cas se présentent:

- soit le joueur perd sa mise, La probabilité que le joueur perde est égale à 0,7
- soit il la récupère, La probabilité qu'il récupère son euro vaut a .
- soit il gagne 100 euros, La probabilité qu'il gagne 100 euros vaut b . (le gain algébrique de 99 euros).

On suppose que toutes les parties jouées sont indépendantes

1) Soit X le gain algébrique du joueur.
   a) Donner la loi de X .
   b) Déterminer $E(X)$ en fonction de a et b
   c) Déterminer a et b pour que, en moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur perde 0,5 euro par partie.
   d) Que vaut alors l'écart-type $\sigma(X)$?
2) Comparer cette machine *ARNAK* à la machine *BANDYMANCHO*, pour laquelle l'espérance de gain d'un joueur est de −0,48 euro par partie, et l'écart-type associé s'élève à 9,87 euros.
3) Le joueur fait deux parties sur la machine *ARNAK*. Soit Y son gain algébrique sur deux parties. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Ex 4 : La société *ASSURLUXE* assure annuellement les téléviseurs d'une chaîne hôtelière de luxe.

- Chaque téléviseur est assuré pour 40 €.
- Le risque qu'un problème mineur survienne dans l'année est de 10%. Le coût du sinistre pour l'assureur est alors de 120 € ;
- Le risque qu'un problème majeur survienne dans l'année est de 2%. Le coût du sinistre pour l'assureur est alors de 1020 € ;

Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique annuel de l'assureur *ASSURLUXE* par contrat pour un téléviseur.
Les valeurs prises par X sont donc $40, -80, -980$

1) a) Donner la loi de X .
   b) Combien l'assureur peut-il espérer gagner en moyenne par contrat?
2) On considère le programme en PYTHON (***annexe***)
   a) Expliquer comment fonctionne la boucle des lignes 7 à 10.
   b) Vérifier qu'après exécution de cette boucle, la liste intervalle est égale à [0 , 0.02 , 0.12 , 1]
   c) Compléter le programme précédent pour qu'il simule des valeurs prises par X pour un échantillon de n contrats.
3) On a complété le programme précédent en ajoutant les lignes 19 à 23.
   Voir le programme en PYTHON (***annexe***)
   a) A quoi sert ce programme ?
   b) Faite fonctionner ce programme pour des grandes valeurs de n (par exemple $n=10\,000$).
   c) Vers quelle valeur tend la valeur de m si la valeur de n devient de plus en plus grande ?