Les droites du plan

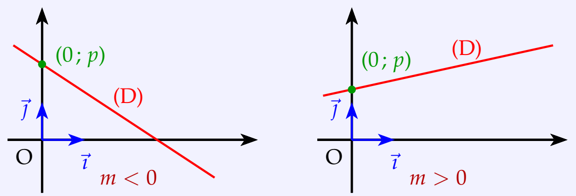
On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Équation réduite d'une droite

Soit une droite (D), non verticale. Elle admet une unique équation réduite de la forme :

$$y = mx + p$$

- $m \in \mathbb{R}$, désigne le coefficient directeur (ou pente). Il renseigne sur l'inclinaison de la droite.
- $p \in \mathbb{R}$ est appelé « ordonnée à l'origine »



- Si $m = 0$, la droite (D) est **horizontale**

Représentation graphique

Exemple : Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite d'équation $y = -2x + 5$ (1)

Méthode : On construit un tableau de valeurs :

x	0	1	2
y	5	3	1
$(x;y)$	(0;5)	(1;3)	(3;1)

On choisit 2 ou 3 valeurs de x.
On calcule les « y »
On obtient les points de (D)

⚠ On choisit judicieusement les valeurs de « x » de façon à avoir un tracé précis i.e. des points suffisamment éloignés.

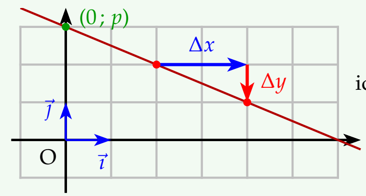
Calcul de m et lecture graphique

- Calcul algébrique : soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de la droite (D) tels que $x_A \neq y_A$ on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{et} \quad p = y_A - m x_A$$

⚠ Si la droite est tracée, il faut s'assurer que le signe de m est cohérent avec l'allure de la droite…

- Lecture graphique



ici $m = \frac{-1}{2}$

⚠ Privilégier les nœuds du quadrillage pour lire m.

Vecteur directeur et équation réduite

Si une droite (D) est donnée par son équation réduite, elle admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; m)$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$

Soient (D) : $y = mx + p$ et (D′) : $y = m'x + p'$

- Si $m = m'$ alors, (D)//(D′)
- Si $m \neq m'$ alors, (D) et (D′) sécantes

⚠ Si $m\,m' = -1$ alors, $(D) \perp (D')$ (cf produit scalaire)

Droites particulières

- Les droites **verticales** : $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  L'équation $x = 0$ représente l'axe des ordonnées.

  Pas de coefficient directeur. La pente est « infinie ».
  Les droites verticales sont dirigées par le vecteur $\vec{\jmath}(0 ; 1)$ ou tout autre vecteur colinéaire à $\vec{\jmath}$
- Les droites **horizontales** : $y = p$, $p \in \mathbb{R}$
  L'équation $y = 0$ représente l'axe des abscisses.

  Le coefficient directeur est **nul**.
  Les droites horizontale sont dirigées par le vecteur $\vec{\imath}(1 ; 0)$ ou tout autre vecteur colinéaire à $\vec{\imath}$.

Équation cartésienne d'une droite

Soit (D) une droite. Elle admet une équation cartésienne i.e. une description de la forme :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où } (a;b) \neq (0;0)$$

⚠ Cette équation n'est pas unique.

- Si $b = 0$, la droite (D) est verticale.
- Si $a = 0$, la droite (D) est horizontale.

La droite (D) admet :

- pour **vecteur directeur** $\vec{u}(-b ; a)$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$;
- pour **vecteur normal** $\vec{n}(a ; b)$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$. On a alors $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Droites parallèles et droites sécantes

Soient $\begin{cases} (D) \ : ax + by + c = 0 \\ (D') \ : a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

- $(D)//(D') \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ **colinéaires**

  $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow -ba' - a(-b') = 0$
- Si (D) et (D′) sont sécantes en I, les coordonnées de I sont **solutions** du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Méthode pour déterminer une équation cartésienne

Soient les point $A(1\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;-4)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$$\begin{aligned} M(x\ ;\ y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3-1 \\ y-2 & -4-2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -6(x-1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 - 2y + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x - 2y + 10 = 0 \overset{\div(-2)}{\Leftrightarrow} 3x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

Quelques contextes et questions classiques

- Une droite est définie par 2 points distincts ou par un point et une vecteur directeur (non nul).
- Vecteur et coefficient directeur

  (D) : $3x + 5y + 2 = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  L'équation réduite (D) : $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{3}$ a pour coefficient directeur $m = -\dfrac{3}{5}$
- Lorsqu'il s'agit de démontrer que trois droites sont concourantes, on détermine le point d'intersection I des deux premières droites et l'on vérifie que I appartient à la troisième !

  Remarque : Bien entendu, s'il s'agit de droites remarquables du triangle : médianes, hauteurs, médiatrices ou bissectrices, d'après leurs propriétés, on peut affirmer qu'elle sont concourantes sans avoir à le démontrer.
- Un contexte fréquent est celui d'une famille « infinie » de droites

  Exemple : Soit $m \in \mathbb{R}$, on pose $d_m\ :\ (2m+3)x - (m-1)y - 10 = 0$

  Le principe : À chaque valeur du paramètre m, on associe une droite :

  Si $m = 1$ alors $d_1\ :\ 5x - 10 = 0$ droite verticale.

  Si $m = 2$ alors $d_2\ :\ 7x - y - 10 = 0$ etc.

  Dans ces exercices, il s'agit d'étudier les propriétés de cette famille.