Chapitre 6 - Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

I. 1. Définition

Exemple

Considérons une suite numérique U_n où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 3$,
$U_1 = 8$,
$U_2 = 13$,
$U_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3. La suite est donc définie par : $U_{n+1} = U_n + 5$ et $U_0 = 3$.

Déf. Une suite U_n est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = U_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite.

méthode (Démontrer si une suite est arithmétique).
1) La suite U_n définie par : $U_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite V_n définie par : $V_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $U_{n+1} - U_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9.
U_n est une suite arithmétique de raison –9.

2) $V_{n+1} - V_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
V_n n'est pas une suite arithmétique.

I. 2. Variation

Propriété

U_n est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite U_n est décroissante.

Exemple

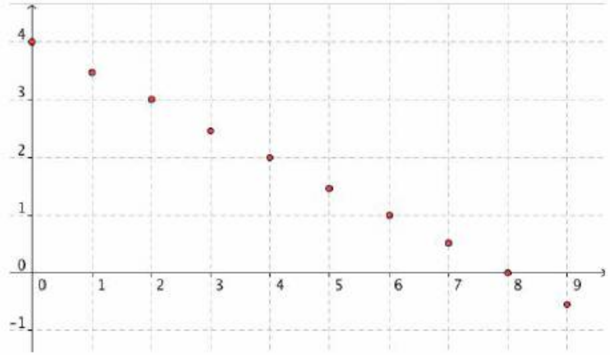
La suite arithmétique U_n définie par $U_n = 8 - 3n$ est décroissante car de raison négative et égale à –3.

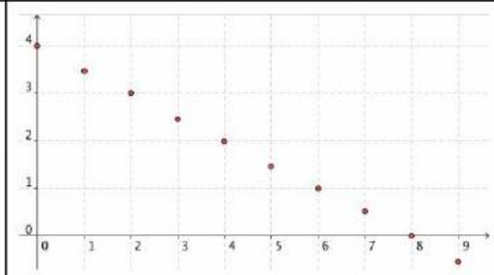
I. 3. Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple

On a représenté ci-dessous la suite de raison $-0,5$ et de premier terme 4.



RÉSUMÉS	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0	**Exemple :** $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

II. Suites géométriques

II. 1. Définition

Exemple

Considérons une suite numérique U_n où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$U_0 = 5, \quad U_1 = 10, \quad U_2 = 20, \quad U_3 = 40.$
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $U_{n+1} = 2 \times U_n$ et $U_0 = 5$.

Déf. Une suite U_n est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = q \times U_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

Exemple (exemple concret)

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%. Chaque année, le capital est multiplié par $1,04$. Ce capital suit une progression géométrique de raison $1,04$.

On a ainsi :
$U_1 = 1,04 \times 500 = 520$
$U_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$
$U_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $U_{n+1} = 1,04 \times U_n$ avec $U_0 = 500$

II. 2. variations

Propriété

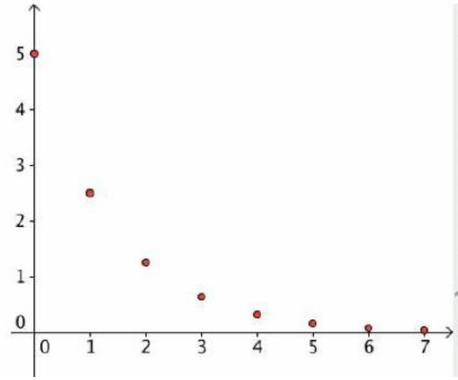
U_n est une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 strictement posit

- Si $q > 1$ alors la suite U_n est croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite U_n est constante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite U_n est décroissante.

II. 3. Représentation graphique

Exemple

La suite géométrique U_n définie par $U_{n+1} = 0,5 \times U_n$ et $U_0 = 5$ est décroissante car la raison est strictement positive et inférieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	5
3	1	2.5
4	2	1.25
5	3	0.63
6	4	0.31
7	5	0.16
8	6	0.08
9	7	0.04
10	8	0.02
11	9	0.01

	(u_n) une **suite géométrique** - **de raison** $q > 0$ - de premier terme $u_0 > 0$	**Exemple :** $q = 0,5$ et $u_0 = 5$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 0,5 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 0,5.
Variations	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 0,5 < 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.