Continuité & Convexité – Terminale option maths complémentaire

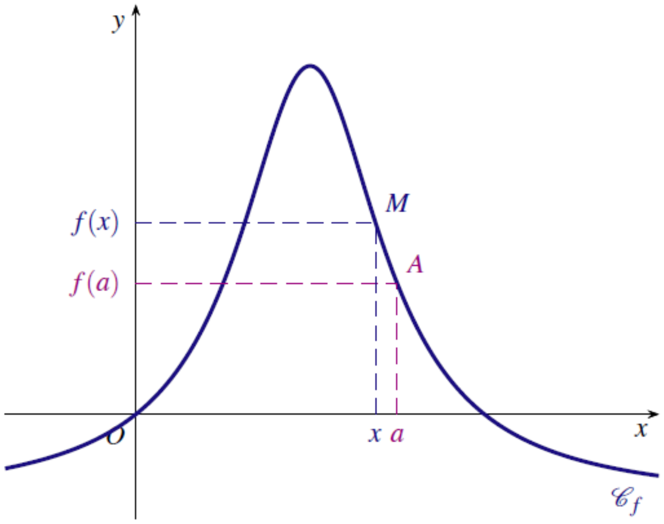
La continuité

Notion de continuité

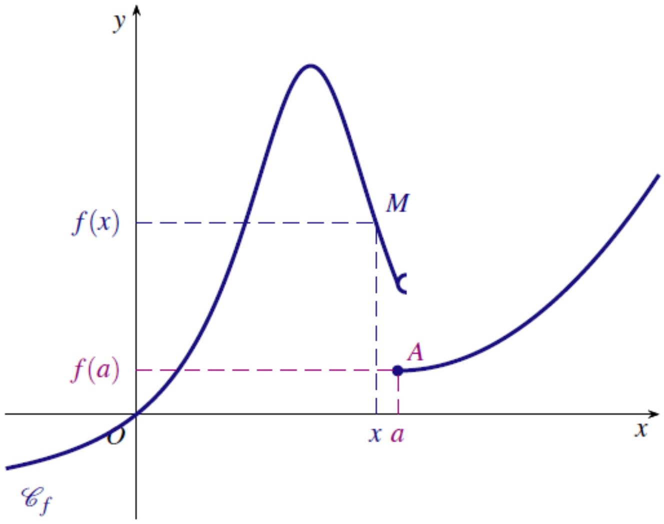
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x



La fonction f est continue.
Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

Propriétés

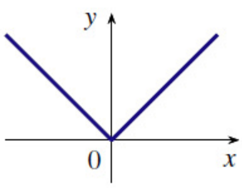
THÉORÈME *(admis)*

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

REMARQUE

La réciproque du théorème est fausse :

Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.
Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est contine en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

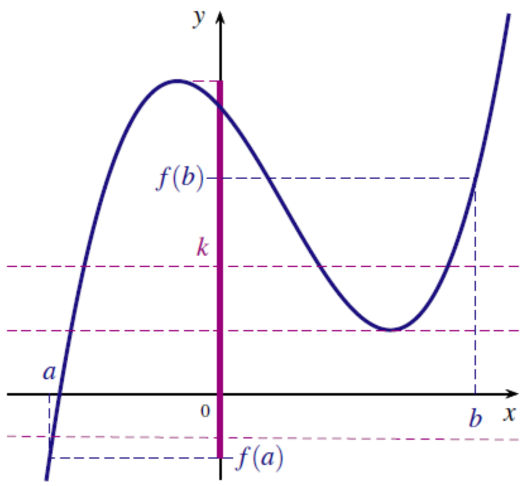
Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME (*admis*)

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et continue sur I alors elle vérifie la propriété suivante : quels que soient les réels a et b de l'intervalle I, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a;b]$.

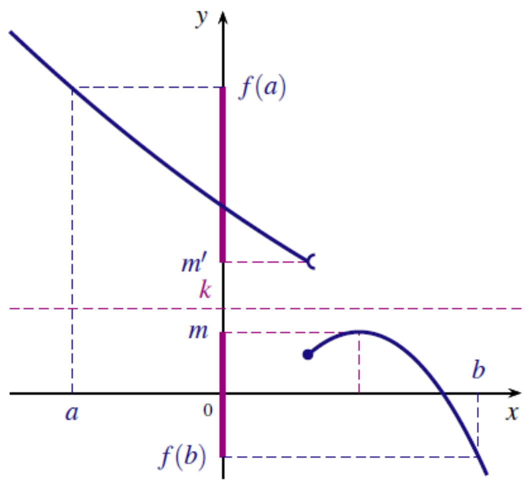
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ est un intervalle. Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle. Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

COROLLAIRE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I, $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** c appartenant à $[a;b]$.

La convexité

Fonctions convexes & concaves

DÉFINITIONS

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

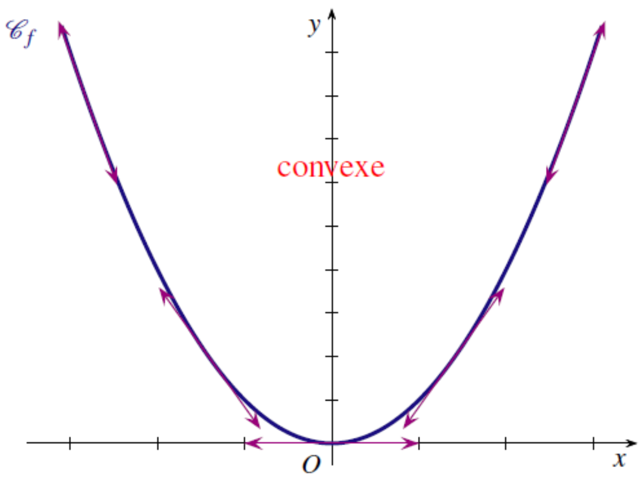
— Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

— Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

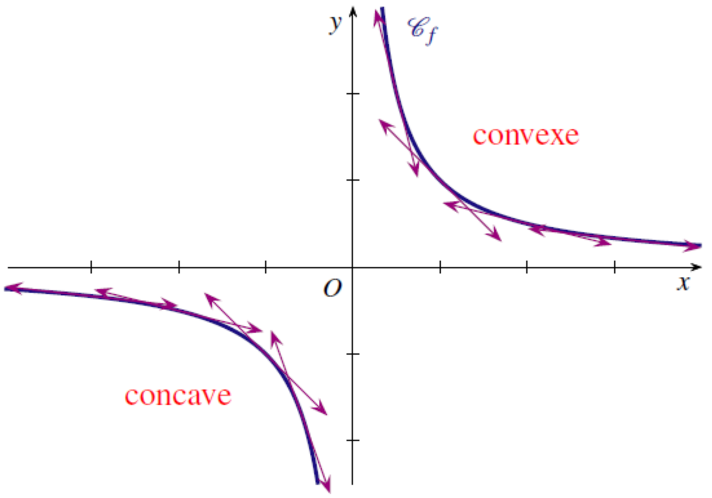
Quelques exemples :

- Soit $f(x)=x^2$; f est convexe sur IR
- Soit $g(x)=1/x$; g est convexe sur IR+* et concave sur IR-*
- Soit $h(x)=\sqrt{x}$; h est concave sur IR+

EXEMPLES



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

THÉORÈME *(admis)*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

— f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.

— f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'.

— Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.

— Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘		↗	
convexité de f		CONCAVE		CONVEXE	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

Point d'inflexion

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

EXEMPLE

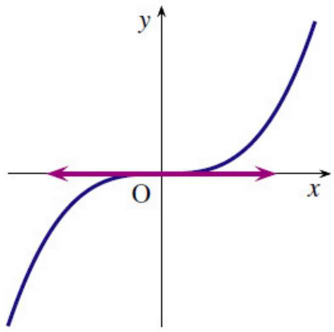
La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

— Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.

— Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.



CONSÉQUENCES

— En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.

— Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

— Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

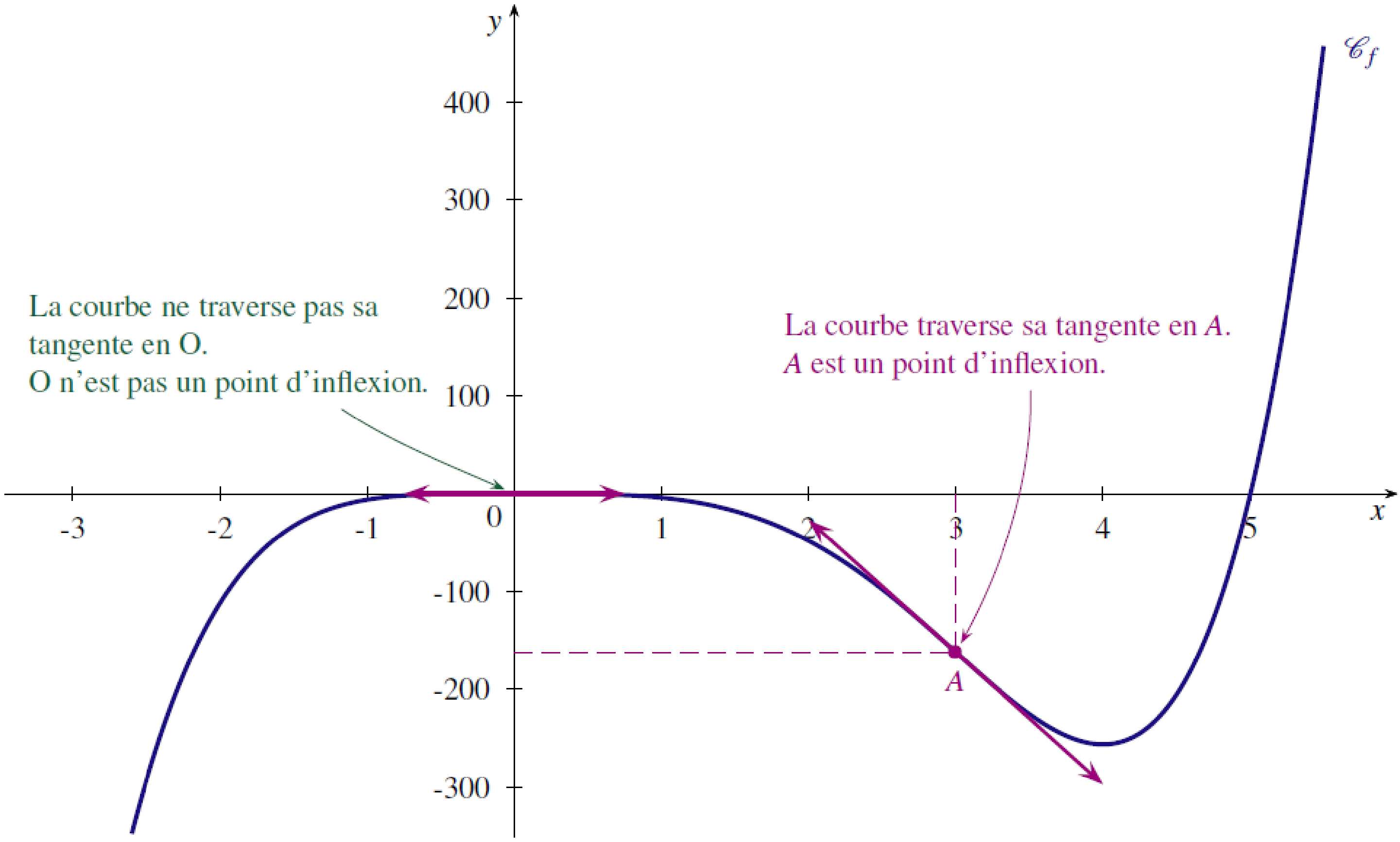
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'		↘		↘		↗	

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3;f(3))$.

En effet :

— $f''(0)=0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty;3]$ $f''(x)\leqslant 0$ donc le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$).

— f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A\,(3;-162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$).



Applications

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=8x^2-2x-\dfrac{9}{2x+3}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8x\left(8x^2+23x+15\right)}{(2x+3)^2}$.

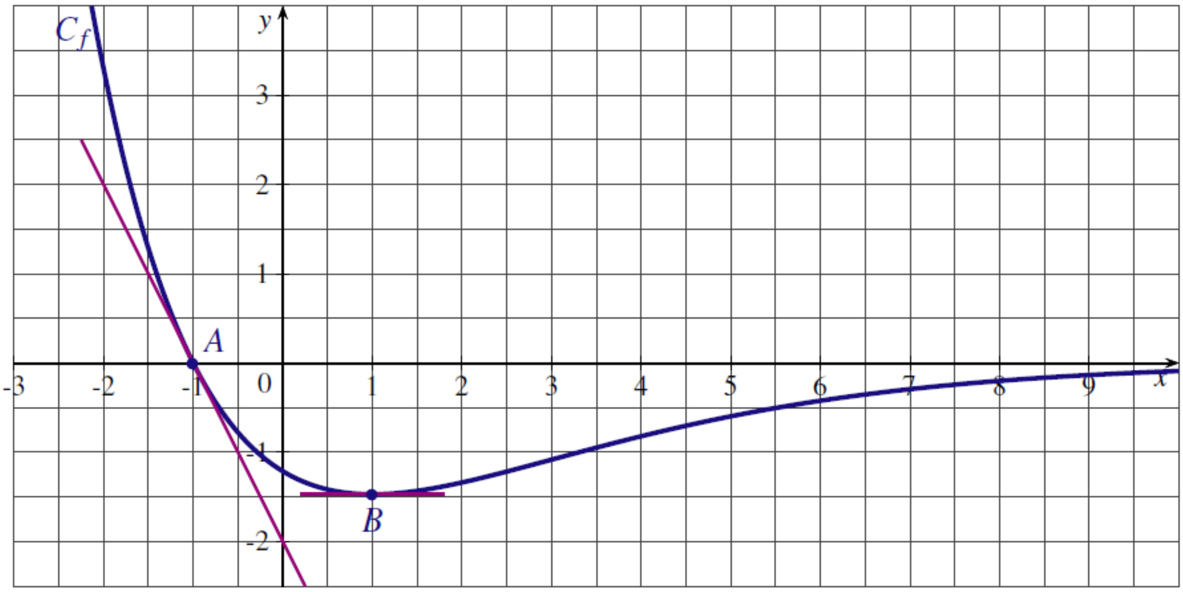
2. Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 2

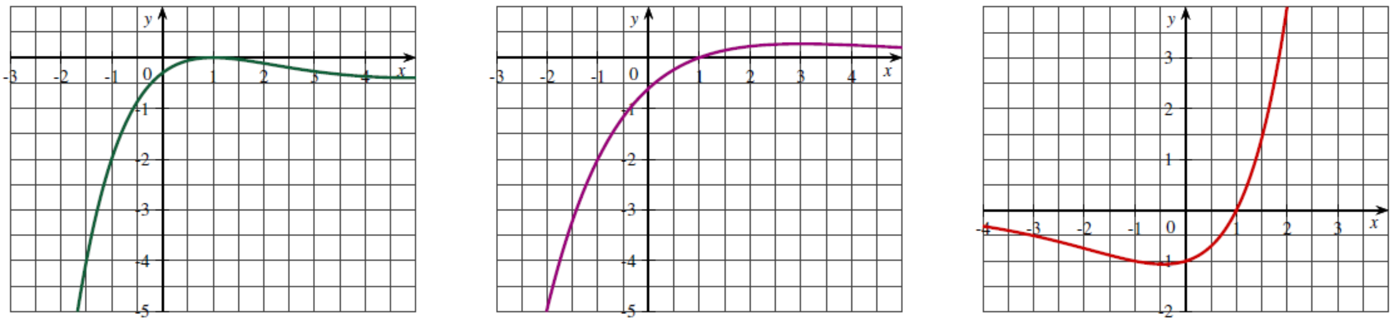
La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0;-2)$;

— la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;



1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



courbe C_1 courbe C_2 courbe C_3

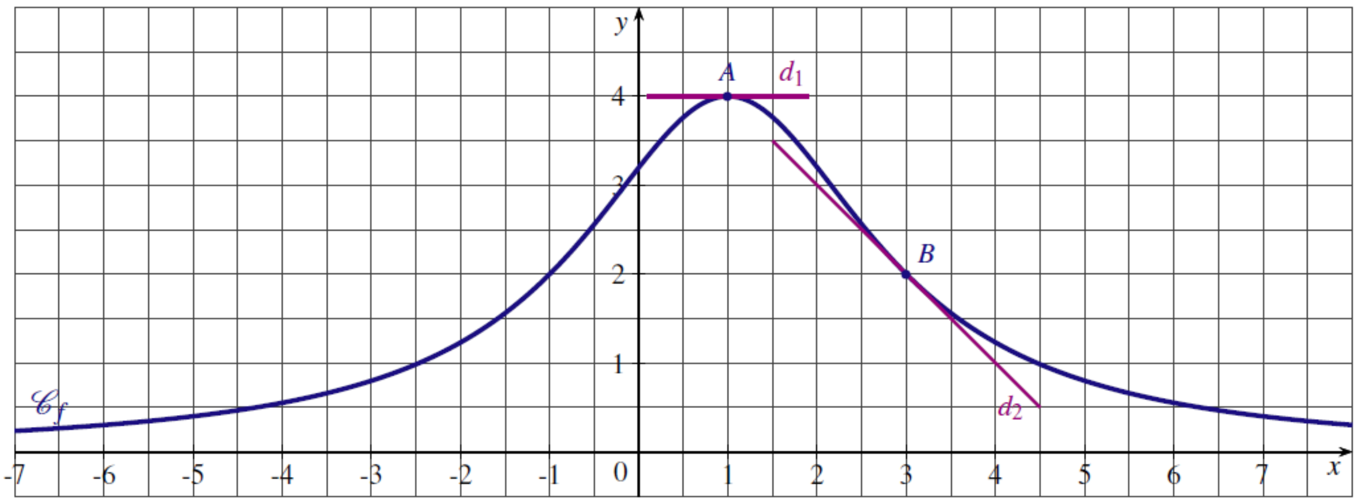
EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On sait que :

— Les droites d_1 et d_2 sont tangentes à la courbe aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 3 ;

— La tangente T à la courbe au point d'abscisse -1 a pour équation $y = x + 3$.

On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Tracer la droite T puis, déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(1)$ et $f'(3)$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   a) Donner le tableau des variations de la fonction g.
   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse -1.

EXERCICE 5

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1 ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

1. a) La fonction f est-elle continue sur $]-3;+\infty[$?
   b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
   c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
   a) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5;+\infty[$
   b) $f'(-2) \times f'(0) \leqslant 0$
   c) $f'(-2) \times f'(3) \leqslant 0$

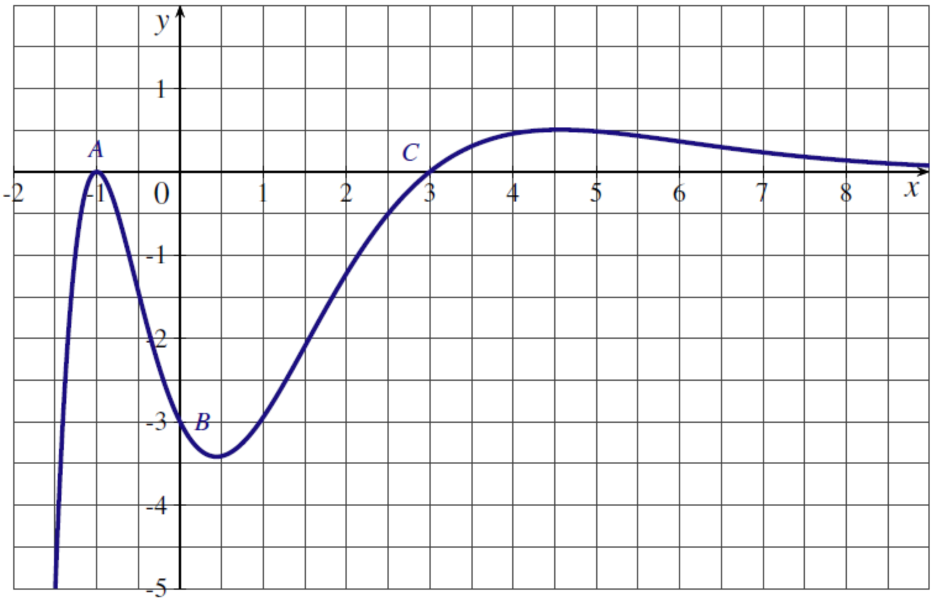
EXERCICE 6

Soit f la fonction définie $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x+1}$. On note f' sa dérivée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 7

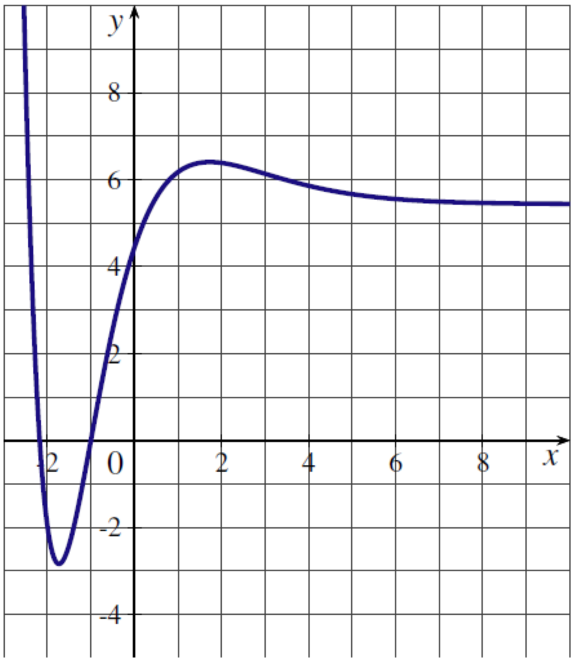
On considère une fonction f définie sur R et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



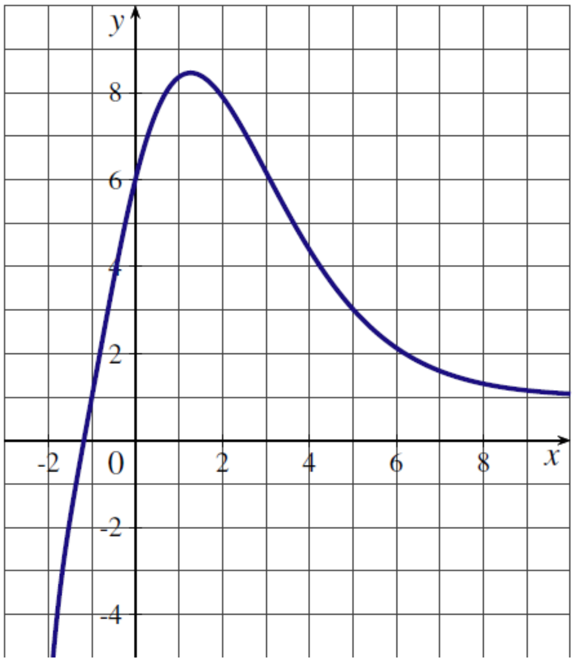
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

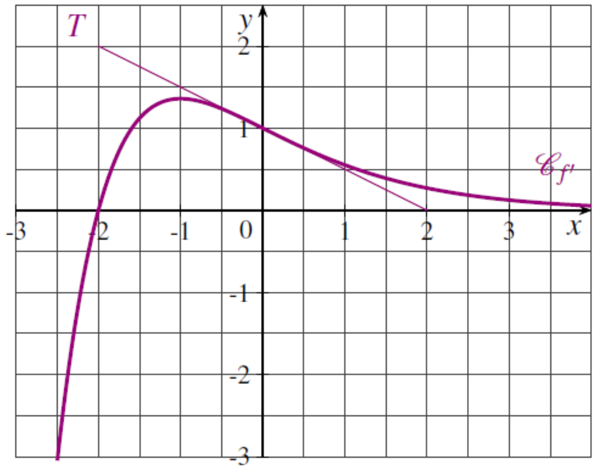


Courbe 2



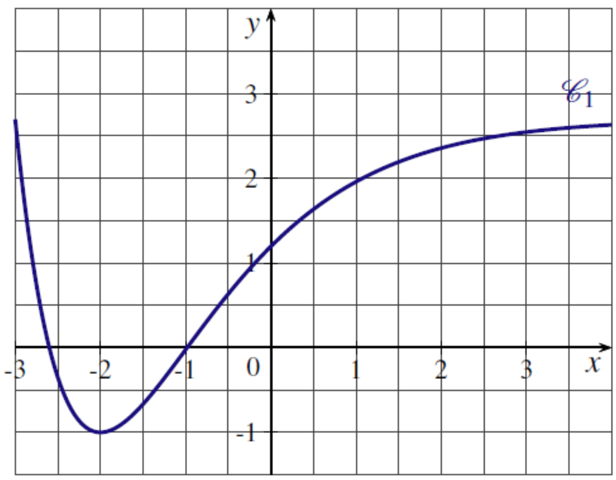
EXERCICE 8

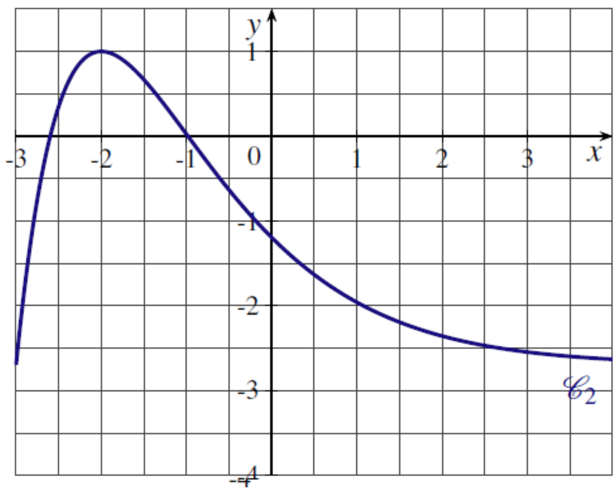
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathscr{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.

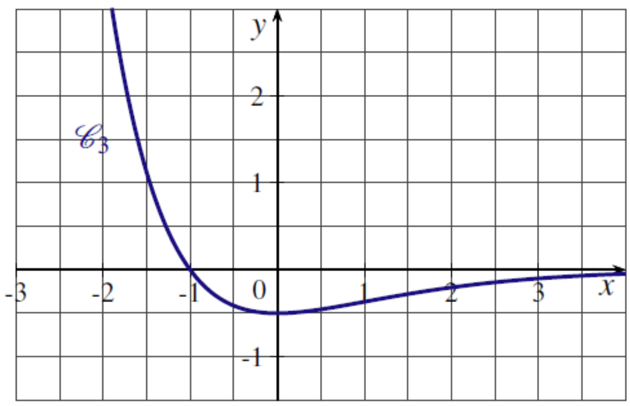


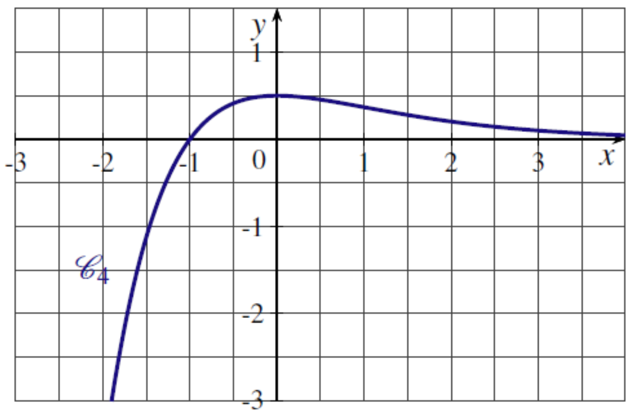
1. Par lecture graphique :
   a) Résoudre $f'(x) = 0$.
   b) Résoudre $f''(x) = 0$.
   c) Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.









a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.

b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

c) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 9

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

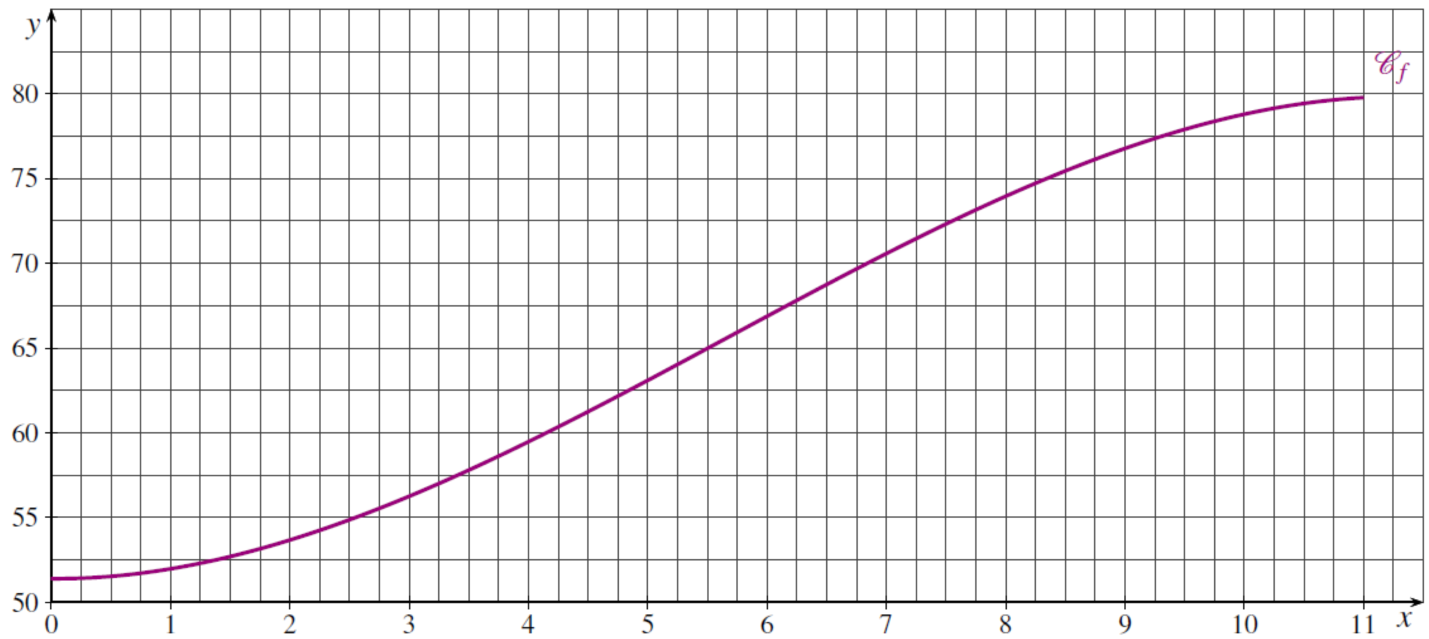
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

$$f(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}68x^2 - 0{,}06x + 51{,}4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



1. a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
   b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   c) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?
3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.
   Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

EXERCICE 10

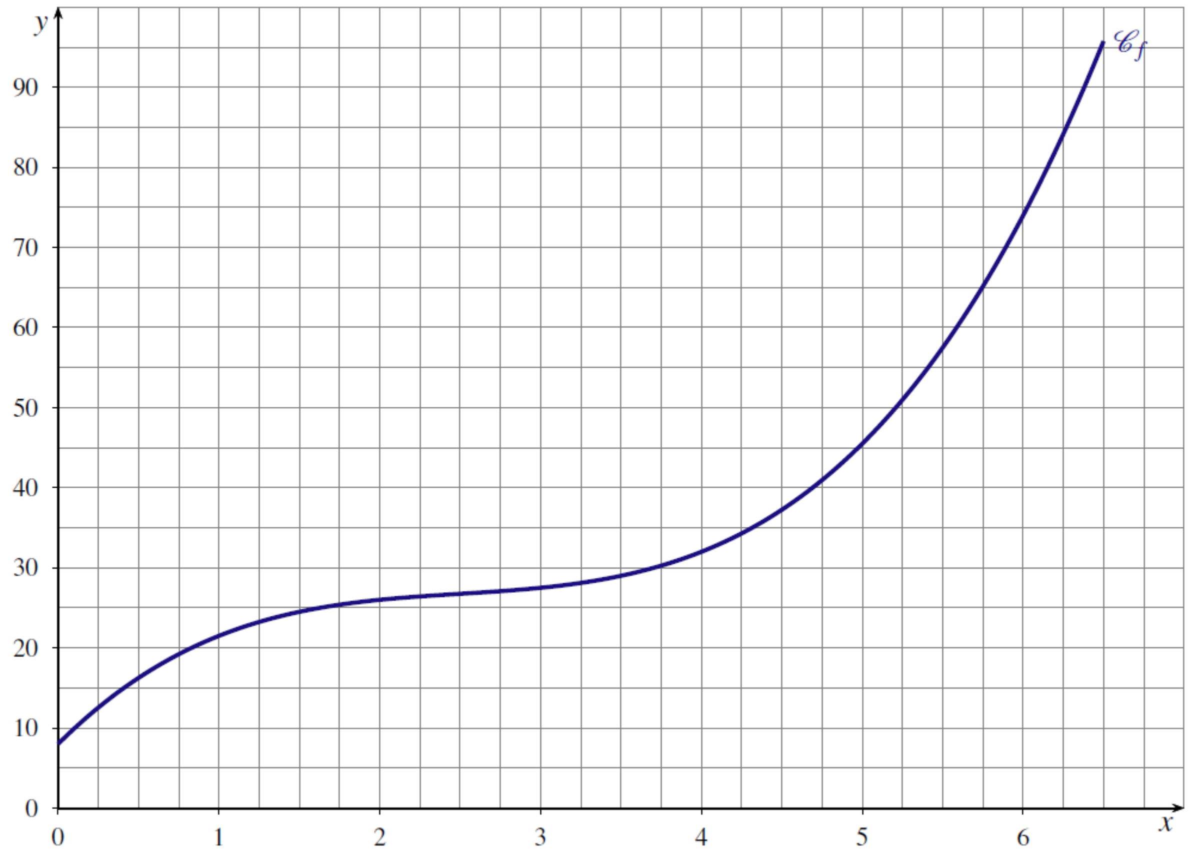
PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;6{,}5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.
La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0;6{,}5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
   a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
   b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 6{,}5]$ par $B(x) = 13{,}25x - f(x)$.
   a) Étudier les variations de la fonction B sur $]0\ ;\ 6{,}5]$.
   b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.

   Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

PARTIE C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;6{,}5]$ par $C(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
   b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
   a) Montrer $C'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2+0{,}5x+2)}{x^2}$.
   b) Étudiez les variations de la fonction C.
   c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.