FONCTIONS POLYNOMES (Partie 1)

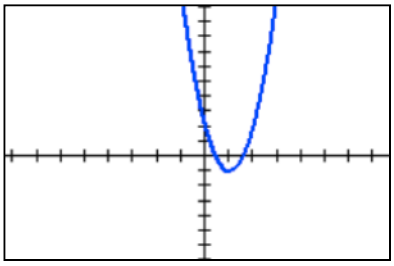
I. Fonctions polynômes du second degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EXTobPZzORo
Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMlk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-6x+2$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Avant tout, il est utile de tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice. Cela permettra de vérifier au fur et à mesure les résultats.



1) On a : $f'(x)=3\times 2x-6=6x-6$.

Si $f(x)=ax^2+bx+c$
Alors $f'(x)=2ax+b$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x)=0$:
Soit : $6x-6=0$
Donc $6x=6$ et $x=\frac{6}{6}=1$.
On dresse alors le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)=6x-6$		$-$	0	$+$	

3) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	-1	↗	

Théorème :
- Si $f'(x)\geq 0$, alors f est croissante.
- Si $f'(x)\leq 0$, alors f est décroissante.

En effet : $f(1)=3\times 1^2-6\times 1+2=-1$.
La fonction f admet un minimum égal à -1 en $x=1$.

II. Fonctions polynômes du troisième degré

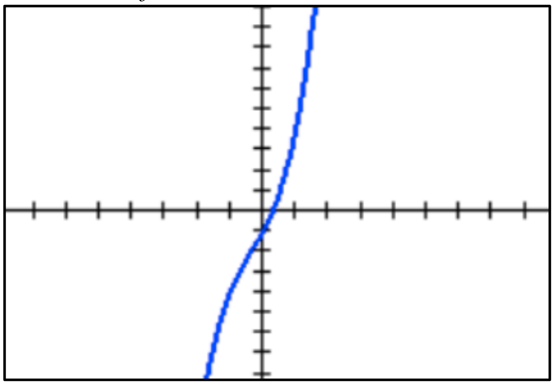
Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/23_Ba3N0fu4

EXEMPLE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x^2+3x-1$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

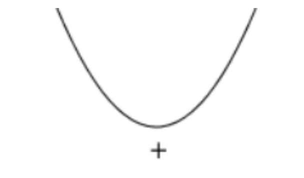
On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



1) On a : $f'(x)=3x^2+2x+3$.

Si $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Alors $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x)=0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2+2x+3$ est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32$
$\Delta < 0$ donc l'équation $f'(x)=0$ ne possède pas de solution.
Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive pour tout x.



x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)=3x^2+2x+3$	+

3) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	$\nearrow$

EXEMPLE 2

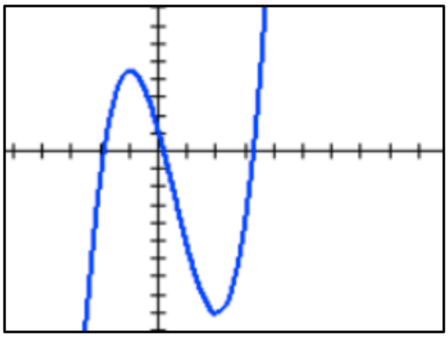
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.

2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de f.

On trace courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



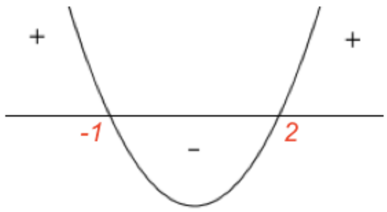
1) On a : $f'(x) = 3x^2 - 1{,}5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

Le discriminant du trinôme $3x^2 - 3x - 6$ est égal à Δ = (-3)^2 – 4 x 3 x (-6) = 81

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{81}}{2 \times 3} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{81}}{2 \times 3} = 2$

Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive à l'extérieur de ses racines -1 et 2.



x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$		+	0	–	0	+	

3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f		↗	4,5	↘	-9	↗	

En effet, $f(-1) = (-1)^3 - 1{,}5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 1 = 4{,}5$ et $f(2) = 2^3 - 1{,}5 \times 2^2 - 6 \times 2 + 1 = -9$