

FONCTIONS POLYNOMES

(Partie 2)

I. Fonctions polynômes du quatrième degré

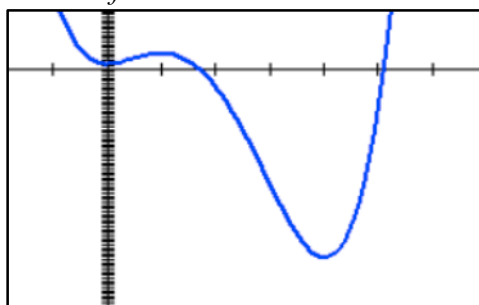
Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du quatrième degré

▶ Vidéo <https://youtu.be/uKVKSAVEER4>

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 5]$. par $f(x) = 1,5x^4 - 10x^3 + 12x^2 + 2$.

- 1) Démontrer que $f'(x) = 6x(x-1)(x-4)$.
- 2) Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) En déduire le minimum et le maximum de f sur $[0 ; 5]$.

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



1) On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1,5 \times 4 \times x^3 - 10 \times 3 \times x^2 + 12 \times 2 \times x \\ &= 6x^3 - 30x^2 + 24x \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} 6x(x-1)(x-4) &= 6x(x^2 - 4x - x + 4) \\ &= 6x(x^2 - 5x + 4) \\ &= 6x^3 - 30x^2 + 24x \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Alors $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$, soit : $6x(x-1)(x-4) = 0$

On a trois solutions : $x = 0$, $x = 1$ et $x = 4$.

On dresse un tableau de signes :

x	0	1	4	5
$6x$	○ +	+	+	
$x-1$	-	○ +	+	
$x-4$	-	-	○ +	
$f'(x) = 6x(x-1)(x-4)$	+ ○	○ -	○ +	

3) On dresse alors le tableau de variations :

x	0	1	4	5
f'		○ +	- ○	+ ○
f	2	5,5	-62	-10,5

En effet :

$$f(0) = 1,5 \times 0^4 - 10 \times 0^3 + 12 \times 0^2 + 2 = 2$$

$$f(1) = 1,5 \times 1^4 - 10 \times 1^3 + 12 \times 1^2 + 2 = 5,5$$

$$f(4) = 1,5 \times 4^4 - 10 \times 4^3 + 12 \times 4^2 + 2 = -62$$

$$f(5) = 1,5 \times 5^4 - 10 \times 5^3 + 12 \times 5^2 + 2 = -10,5$$

4) Sur $[0 ; 5]$, le minimum de f est égal à -62 . Il est atteint pour $x = 4$.
Le maximum de f est égal à $5,5$. Il est atteint pour $x = 1$.

II. Tangente en un point de la courbe

Méthode : Déterminer avec la calculatrice une équation d'une tangente à une courbe

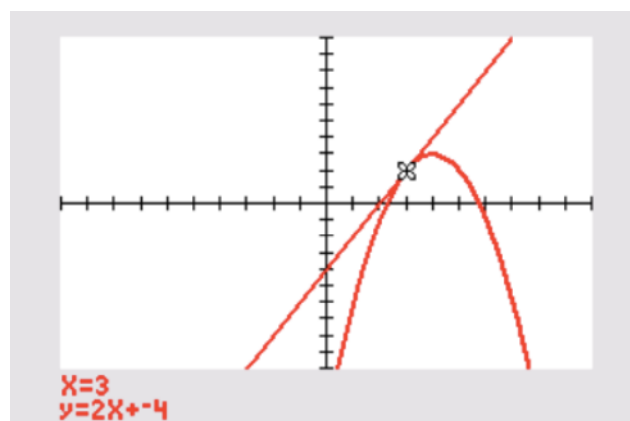
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 8x - 13$.

A est un point de la courbe d'abscisse 3.

- 1) Donner une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A.
- 2) Tracer la tangente en A.

1) À l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point et d'afficher son équation.

Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, saisir :



Sur TI: Touches « 2^{nde} » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 3. Puis « ENTER ».

Sur Casio : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 3. Puis « EXE » + « EXE ».

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 3 est $y = 2x - 4$.

2) On a l'équation de la tangente :

$$y = 2x - 4$$

- -4 est son ordonnée à l'origine.
- 2 est son coefficient directeur.

Pour la fonction, 2 est appelé le **nombre dérivé**.

Et on a : $f'(3) = 2$

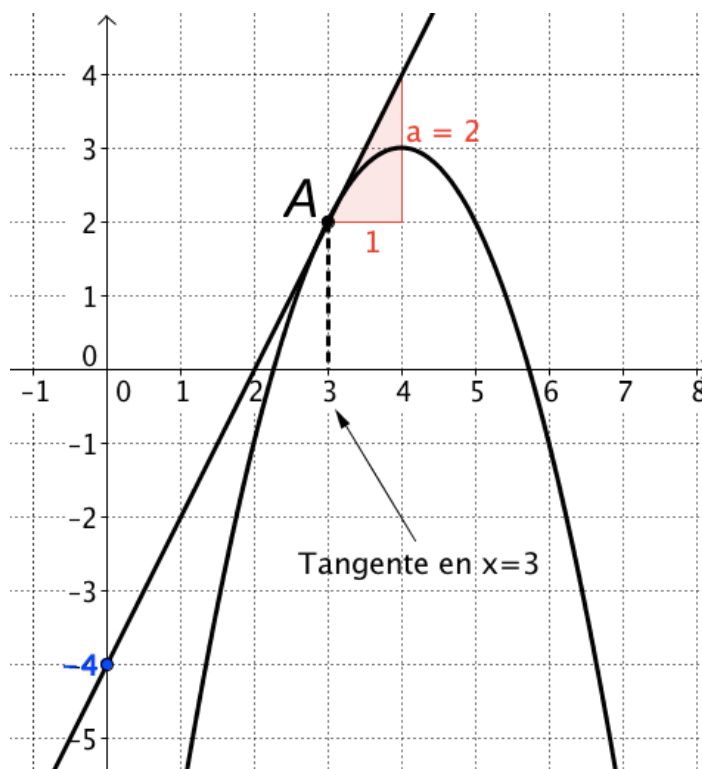
On peut ainsi retrouver le coefficient directeur de la tangente par calcul :

$$f(x) = -x^2 + 8x - 13$$

$$f'(x) = -2x + 8$$

Le nombre dérivé en 3 est :

$$f'(3) = -2 \times 3 + 8 = 2$$

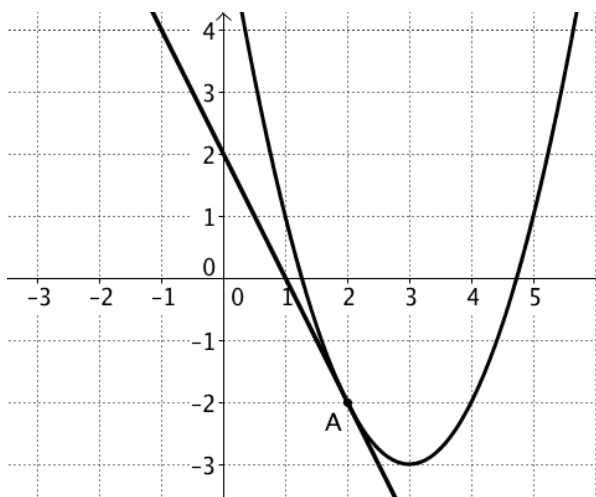


Méthode : Déterminer graphiquement une équation d'une tangente à une courbe

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f .

On a représenté sa tangente au point A d'abscisse 2.

- 1) Déterminer le nombre dérivé de f en $x = 2$.
- 2) En déduire une équation de la tangente au point A d'abscisse 2.

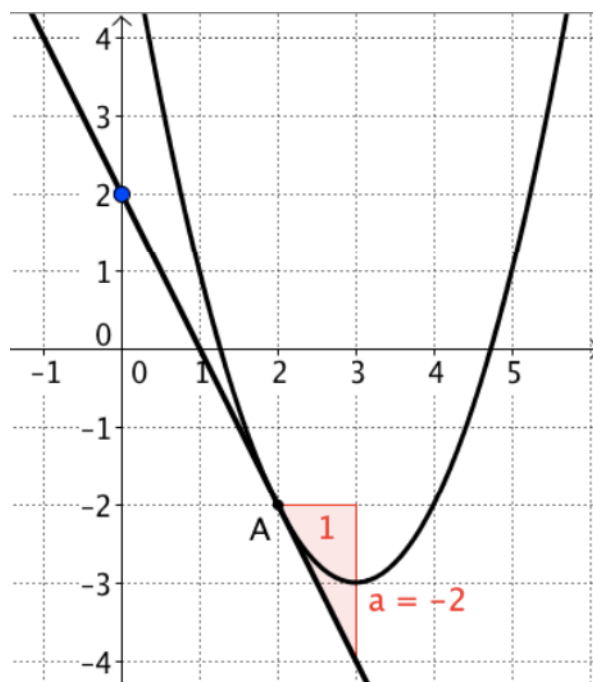


1) $f'(2) = -2$

2) L'ordonnée à l'origine de la tangente est égale à 2.

Une équation de la tangente est donc :

$$y = -2x + 2$$



III. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

📺 Vidéo <https://youtu.be/FCUd2muFEyI>

Résoudre : 1) $5x - x^2 = 2$

2) $5x - x^2 > 2$

1) On représente la fonction f définie

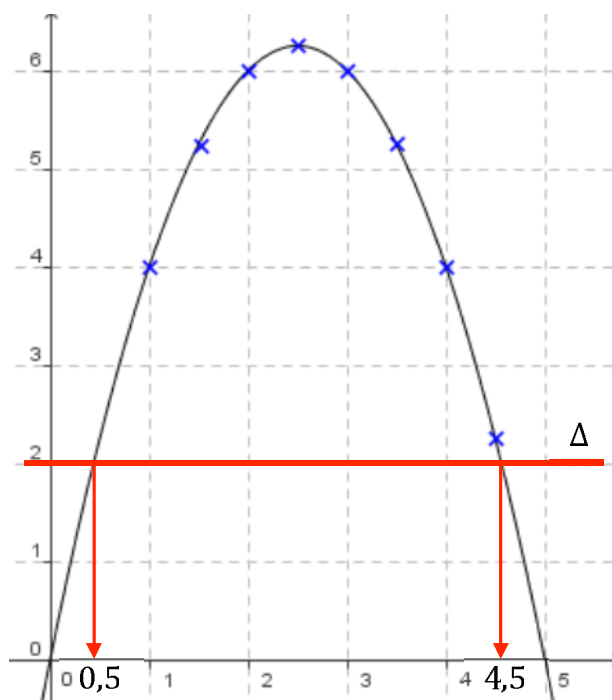
par : $f(x) = 5x - x^2$.

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $(0 ; 2)$.

On lit graphiquement que l'équation $5x - x^2 = 2$ admet pour solutions les nombres 0,5 et 4,5.

2) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe pour lesquels la courbe est au-dessus de la droite Δ .

On lit que l'inéquation $5x - x^2 > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle $[0,5 ; 4,5]$.



Remarques :

- a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- b) L'équation $A(x) = 7$, par exemple, n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.