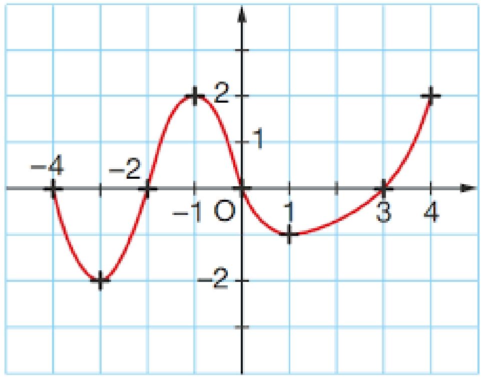
La Dérivation – 1ère TT2

A) Lectures graphiques

1) lire une image, un antécédent

On donne la fonction représentée par le graphique ci-contre :



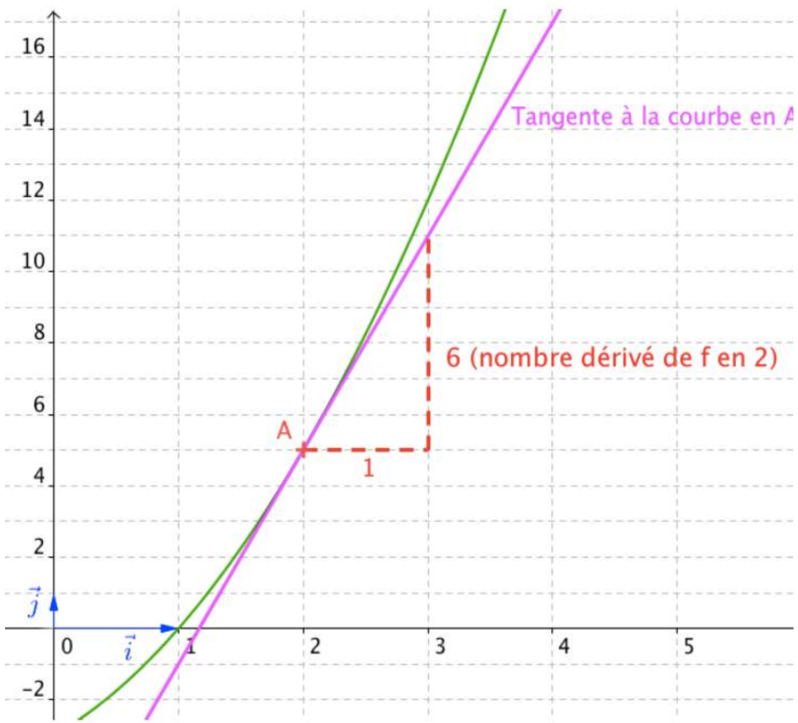
On obtient le tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	3	4
$f(x)$	0	-2	0	2	0	-1	0	2

Rappels :

- f admet un minimum en -2
- f admet un maximum en 2

2) lire un nombre dérivé



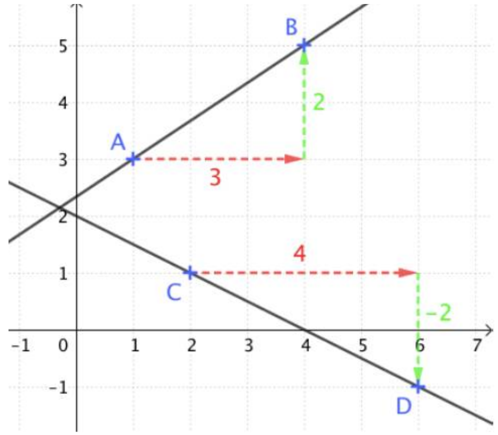
Définition : Soit f une fonction et $a \in D_f$; le nombre dérivé de f en a correspond au coefficient-directeur de f au point $A(a\,;f(a))$; on note le ***nombre dérivé*** de f en a : $f'(a)$

Dans l'exemple précédent, on lit $f'(2)=\frac{6}{1}=6$

3) lire une équation de droites

Rappel : le coefficient-directeur d'une droite (AB) est égal à :

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



dans le graphique on obtient :

- coeff-dir de (AB) : $m=\frac{2}{3}$
- coeff-dir de (CD) : $m'=\frac{-2}{4}$

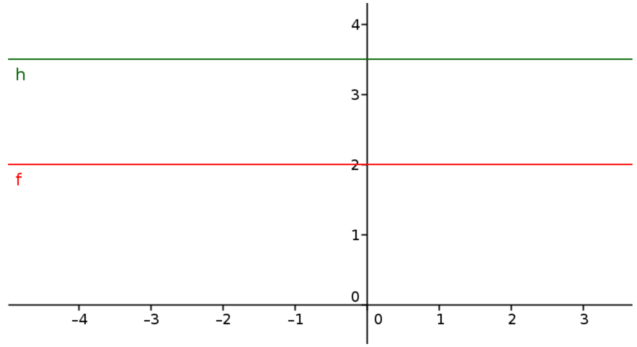
B) Calculs de dérivées

1) Les fonctions constantes

Propriété : Soit une fonction constante $f(x)=k$ alors $f'(x)=0$

exemples :

- si $f(x)=-2$ alors $f'(x)=0$
- si $f(x)=0{,}5$ alors $f'(x)=0$
- si $f(x)=3$ alors $f'(x)=0$



2) Les fonctions affines

Propriété : Soit une fonction linéaire $f(x)=x$ alors $f'(x)=1$
Soit une fonction affine $f(x)=x+b$ alors $f'(x)=1$
Soit une fonction linéaire $f(x)=a\,x$ alors $f'(x)=a$
Soit une fonction affine $f(x)=a\,x+b$ alors $f'(x)=a$

exemples :

- si $f(x)=2x$ alors $f'(x)=2$
- si $f(x)=-3x$ alors $f'(x)=-3$
- si $f(x)=0,4x+5$ alors $f'(x)=0,4$

3) Les fonctions carrés

Propriété : Soit une fonction carré $f(x)=x^2$ alors $f'(x)=2x$
Soit une fonction carré $f(x)=ax^2$ alors $f'(x)=2ax$
Soit une fonction carré $f(x)=ax^2+b$ alors $f'(x)=2ax$

$$f(x)=5x^{2}-3\cancel{x}\ \cancel{+2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=2\times 5x\quad -3$$

exemples :

- si $f(x)=x^2-3$ alors $f'(x)=2x$
- si $f(x)=-3x^2+5x-1$ alors $f'(x)=-3\times 2x+5=-6x+5$
- si $f(x)=0,75x^2+4x-3$ alors $f'(x)=0,75\times 2x+4=1,5x+4$

4) Les fonctions cubes

Propriété : Soit une fonction carré $f(x)=x^3$ alors $f'(x)=3x^2$
Soit une fonction carré $f(x)=ax^3$ alors $f'(x)=3ax^2$
Soit une fonction carré $f(x)=ax^3+b$ alors $f'(x)=3ax^2$

exemples :

- si $f(x)=x^2+5$ alors $f'(x)=3x^2$
- si $f(x)=2x^3+5x^2+4$ alors $f'(x)=2\times 3x^2+5\times 2x=6x^2+10x$
- si $f(x)=-x^3-4x^2+3x+5$ alors
  $f'(x)=-3x^2-4\times 2x+3\times 1+0=-3x^2-8x+3$

--> à voir :

- **Vidéo :** https://www.youtube.com/watch?v=uTk3T_GfwYo
- **Vidéo :** https://www.youtube.com/watch?v=5WDIrv_bEYE
- **Vidéo :** https://www.youtube.com/watch?v=1fOGueiO_zk

Principe de calculs :

$$f(x)=2x^{3}\ -3x^{2}\ +5\cancel{x}\ \cancel{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=3\times 2x^{2}\quad -2\times 3x\quad +5$$

Applications :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ b) $g(x)=5x^3+2x^2+2x-7$
c) $h(x)=-2x^3-3x^2-7x+8$ d) $k(x)=-x^3+x^2+1$
e) $l(x)=4x^3+1$ f) $m(x)=-x^3+7x$

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ donc $f'(x)=3\times x^2-2\times 3x+2=3x^2-6x+2$

b) $g(x)=5x^3+2x^2+2x-7$ donc $g'(x)=3\times 5x^2+2\times 2x+2=15x^2+4x+2$

c) $h(x)=-2x^3-3x^2-7x+8$ donc $h'(x)=3\times(-2)x^2-2\times 3x-7=-6x^2-6x-7$

d) $k(x)=-x^3+x^2+1$ donc $k'(x)=-3x^2+2\times x=-3x^2+2x$

e) $l(x)=4x^3+1$ donc $l'(x)=3\times 4x^2=12x^2$

f) $m(x)=-x^3+7x$ donc $m'(x)=-3x^2+7$

C) Variations de Fonctions

1) Sens de variations

Théorème : Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$

- Si la dérivée de f est positive sur $[a\,;b]$ alors f est croissante sur $[a\,;b]$
- Si la dérivée de f est négative sur $[a\,;b]$ alors f est décroissante sur $[a\,;b]$
- Si la dérivée de f est nulle en x_0 alors f admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0

2) Fonctions polynômes de degré 2

exemple : Soit la fonction f définie par $f(x)=2x^2-8x+1$ sur $[-1;5]$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$
b) Déterminer les racines de la dérivée
c) Étudier le signe de la dérivée (avec la calculatrice)
d) Dresser le tableau de variations de f
e) En déduire les éventuels extrema locaux de f

--> à voir :

- **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=EXTobPZzORo**
- **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=zxyKLqnlMIk**

solutions :

$f'(x)=2\times 2x-8\times 1+0=4x-8$

les racines de la dérivée vérifient : $f'(x)=0$ donc $4x-8=0$

donc $4x=8$ donc $x=\frac{8}{4}=2$

le signe de la dérivée s'obtient facilement avec le tableur de la calculatrice :

X	Y1	Y'1
0	1	-8
1	-5	-4
2	-7	0
3	-5	4

Ainsi on observe que :

- la dérivée de f est négative sur $[-1;2]$
- la dérivée de f s'annule en $x=2$
- la dérivée de f est positive sur $[2;5]$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		2		5
signe de f'		$-$	0	$+$	
f	11	↘	-7	↗	11

Ainsi la courbe C_f admet un minimum local en $x=2$

3) Fonctions polynômes de degré 3

exemple : Soit la fonction f définie par $f(x)=x^3+4{,}5x^2-12x+5$ sur l'intervalle $[-7;3]$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$
b) Déterminer les racines de la dérivée
c) Étudier le signe de la dérivée (avec la calculatrice)
d) Dresser le tableau de variations de f
e) En déduire les éventuels extrema locaux de f

--> à voir : **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=Ktc-PThiP6I**

solutions :

$f'(x)=3x^2+4{,}5\times 2x-12\times 1+0=3x^2+9x-12$

les racines de la dérivée vérifient : $f'(x)=0$ donc $3x^2+9x-12=0$

donc $\Delta=9^2-4\times 3\times(-12)=225$ l'équation admet donc 2 racines :

$x_1=\frac{-9-\sqrt{225}}{6}=-4$ et $x_2=\frac{-9+\sqrt{225}}{6}=1$

le signe de la dérivée s'obtient facilement avec le tableur de la calculatrice :

X	Y1	Y'1
-5	52.5	18
-4	61	0
-3	54.5	-12
-2	39	-18

X	Y1	Y'1
-1	20.5	-18
0	5	-12
1	-1.5	0
2	7	18

Ainsi on observe que :

- la dérivée de f est négative sur [-4;1]
- la dérivée de f s'annule en $x=-4$ et $x=1$
- la dérivée de f est positive sur $[-7;-4]$ et sur $[1;3]$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-7		-4		1		3
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-33,5	↗	61	↘	-1,5	↗	36,5

Ainsi la courbe C_f admet un minimum local en $x=1$ et un maximum local en $x=-4$