Les Équations différentielles

le COURS complet en Vidéo :
https://www.youtube.com/watch?v=qHF5kiDFkW8

A) Les équations différentielles d'ordre 1

1) Étude d'un exemple

Définition : Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (on la note y en général) ; Elle se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction inconnue y, certaines de ses dérivées successives (y' , y'' , ... etc) et la variable x

Exemples :

- $5y'-2y=0$ --> équation différentielle d'ordre 1 sans 2nd membre
  - notation complète : $5y'(x)-2y(x)=0$
- $2y'+3y=x+3$ --> équation différentielle d'ordre 1 avec 2nd membre
  - notation complète : $2y'(x)+3y(x)=x+3$

Méthode de résolution :

On donne l'ED1 : $(E):5y'-2y=0$; on suppose que $y\neq 0$

donc $5y'=2y$ donc $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{5}$ donc $(\ln y)'=0{,}4$ donc $\ln(y)=0{,}4x+k$

donc $y=e^{0{,}4x+k}$ donc $y(x)=e^{k}.e^{0{,}4x}$

ainsi on observe que la solution de (E) est de la forme $y(x)=C.e^{0{,}4x}$

2) Résolution d'une équation différentielle sans 2nd membre

Théorème : Soit l'équation différentielle $(E):ay'+by=0$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et y une fonction à valeurs réelles ; les solutions générales de (E) sont de la forme $y(x)=C.e^{\frac{-b}{a}.x}$ où C est une constante réelle

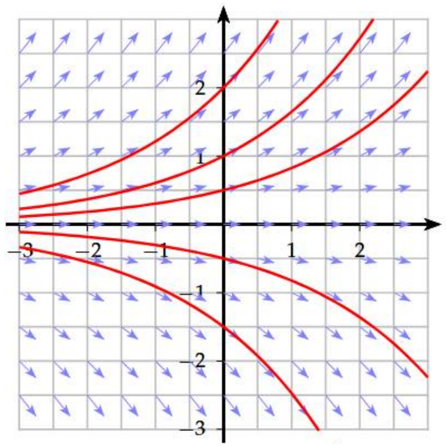
Applications :

- l'ED1 $(E):y'=5$ a pour solutions $y(x)=5x+k$
- l'ED1 $(E):y'=y$ a pour solutions $y(x)=C.e^{x}$
- l'ED1 $(E):y'+4y=0$ a pour solutions $y(x)=C.e^{-4x}$
- l'ED1 $(E):-2y'+5y=0$ a pour solutions $y(x)=C.e^{2{,}5x}$
- l'ED1 $(E):4y'+3y=0$ et $y(0)=2$ (condition initiale)
  a pour solutions $y(x)=2.e^{-0{,}75x}$

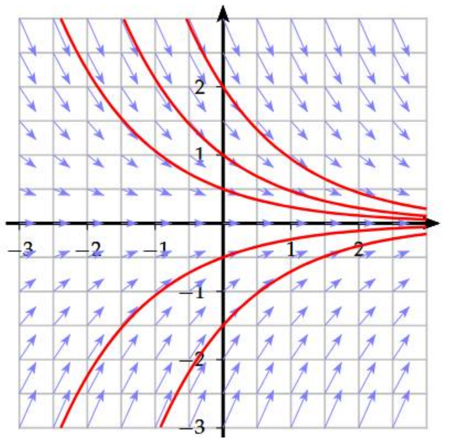
3) Cas général (avec 2nd membre)

Théorème ***de Cauchy-Lipschitz*** :
Soit l'équation différentielle $(E):ay'+by=g(x)$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et $y(x_0)=y_0$ les conditions initiales ; alors (E) admet une unique solution de la forme $y(x)=C.e^{\frac{-b}{a}.x}+f(x)$ où f est une solution particulière de (E)

schéma typique des solutions :



Amplification : $y'=0{,}5y$



Atténuation : $y'=-0{,}75y$

Exemple :
Soit l'ED1 $(E):2y'-3y=6x-7$ avec $y(0)=4$, ici $g(x)=-4x+5$

on note l'équation (sans 2nd membre) $(E_0):2y'-3y=0$

les solutions de (E_0) sont : $y(x)=C.e^{1{,}5x}$

on cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme $f(x)=ax+b$ alors $f'(x)=a$ donc $2\times a-3(ax+b)=6x-7$

soit $(-3a)x+(2a-3b)=6x-7$

par identification des termes on obtient le système $\begin{cases}-3a=6\\2a-3b=-7\end{cases}$

donc $\begin{cases}a=-2\\2a-3b=-7\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases}$ donc $f(x)=-2x+1$

on obtient donc $y(x)=C.e^{1{,}5x}-2x+1$ et $y(0)=4$

donc $y(0)=Ce^0-2\times 0+1$ donc $C+1=4$ donc $C=3$

conclusion : la solution finale de (E) est : $y(x)=3e^{1{,}5x}-2x+1$

Exercice :
On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$(E):-2y'+5y=x^2-3x+4$$

et $y(0)=-4$ la condition initiale

a) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $f(x)=ax^2+bx+c$
b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0):-2y'+5y=0$
c) En déduire les solutions générales de (E)
d) Déterminer la solution finale de (E) en considérant les conditions initiales

B) Les équations différentielles d'ordre 2

1) Étude d'un exemple

on pose l'équation différentielle d'ordre 2 : $(E):y''-3y'+2y=0$ avec $y(0)=4$ et $y'(0)=1$ les conditions initiales

on cherche des solutions de (E) sous la forme $y(x)=C.e^{rx}$
donc $y'(x)=Cre^{rx}$ et $y''(x)=Cr^2e^{rx}$

ainsi puisque y vérifie l'équation (E) alors :
$(Cr^2e^{rx})-3(Cre^{rx})+2(Ce^{rx})=0$

donc $(r^2e^{rx})-3(re^{rx})+2(e^{rx})=0$ car $C\neq 0$

donc $(r^2)-3(r)+2(1)=0$ car $e^{rx}\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

on obtient ainsi une équation d'inconuue r : $r^2-3r+2=0$
(on appelle cette équation une *équation caractéristique*)
on obtient facilement $r=1$ ou $r=2$

cela signifie qu'il y a 2 "familles" de solutions de (E) :
$y_1(x)=Ae^{1x}$ et $y_2(x)=Be^{2x}$

donc l'équation (E) admet comme solutions générales : $y(x)=Ae^x+Be^{2x}$

2) Équation caractéristique

Définition : Soit l'ED2 $(E):ay''+by+cy=0$; on appelle "*équation caractéristique*" associée à (E) l'équation $(E_r):ar^2+br+c=0$

Exemples :

- l'équation caractéristique de $(E):-y''+3y+4y=0$ est $(E_r):-r^2+3r+4=0$ --> solutions : $r=-1$ ou $r=4$
- l'équation caractéristique de $(E):-y''+4y=0$ est $(E_r):r^2+4=0$ --> aucune solution réelle
- l'équation caractéristique de $(E):-2y''+5y=0$ est $(E_r):-2r^2+5r=0$ --> solutions $r=0$ ou $r=2{,}5$
- l'équation caractéristique de $(E):4y''+4y+y=2x+3$ est $(E_r):4r^2+4r+1=0$ --> solution : $r=-0{,}5$

3) Résolution d'une équation différentielle sans 2^nd^ membre

Théorème : Soit l'ED2 $(E):ay''+by+cy=0$ d'équation caractéristique $(E_r):ar^2+br+c=0$ de discriminant Δ ; il existe alors 3 cas distincts :

i. si $\Delta>0$ alors (E_r) admet 2 solutions réelles r_1 et r_2 et les solutions générales de (E) sont de la forme $y(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$
ii. si $\Delta=0$ alors (E_r) admet 1 solution réelle r_0 et les solutions générales de (E) sont de la forme $y(x)=(Ax+B)e^{r_0x}$
iii. si $\Delta<0$ alors (E_r) n'admet pas de solution réelle et les solutions générales de (E) sont de la forme $y(x)=e^{\alpha x}.(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$

exemples :
On étudie dans cette *option* uniquement les 2 premiers cas
(en effet le cas $\Delta<0$ est du programme de l'option "*maths expertes*")

Résoudre les équations différentielles d'ordre 2 :

- $(E_1):2y''+3y-5y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=4$
- $(E_2):y''+4y+4y=0$ avec $y(0)=-1$ et $y'(0)=1$
- $(E_3):y''-4y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=-4$

solutions :

a) $(E_1): 2y''+3y-5y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=4$
l'équation caractéristique est $2r^2+3r-5=0$ donc $r=1$ ou $r=-2{,}5$

donc les solutions générales sont : $y(x)=Ae^x+Be^{2,5x}$

or $y(0)=1$ donc $A+B=1$
et $y'(x)=Ae^x+2{,}5\,Be^{2,5x}$ avec $y'(0)=4$ donc $A+2{,}5\,B=4$
on obtient le système $\begin{cases} A+B=1 \\ A+2{,}5\,B=4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$

d'où les solutions générales : $y(x)=-e^x+2e^{2,5x}$

b) $(E_2): y''+4y+4y=0$ avec $y(0)=-1$ et $y'(0)=1$
l'équation caractéristique est $r^2+4r+4=0$ donc $r=-2$

donc les solutions générales sont : $y(x)=(Ax+B)e^{-2x}$

or $y(0)=-1$ donc $B=-1$
et $y'(x)=Ae^{-2x}-2(Ax+B)e^{-2x}=(-2Ax+A-2B)e^{-2x}$
avec $y'(0)=1$ donc $A-2B=1$
on obtient le système $\begin{cases} B=-1 \\ A-2B=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \end{cases}$

d'où les solutions générales : $y(x)=(-x-1)e^{-2x}$

c) $(E_3): y''-4y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=-4$
l'équation caractéristique est $r^2-4=0$ donc $r=2$ ou $r=-2$

donc les solutions générales sont : $y(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x}$

or $y(0)=1$ donc $A+B=1$
et $y'(x)=2Ae^{2x}-2Be^{-2x}$ avec $y'(0)=-4$ donc $2A-2B=-4$
on obtient le système $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=-4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A=-0{,}5 \\ B=1{,}5 \end{cases}$

d'où les solutions générales : $y(x)=-0{,}5e^{2x}+1{,}5e^{-2x}$

4) Cas général (avec 2nd membre)

Théorème : Soit l'ED2 $(E): ay''+by+cy=g(x)$ où g est continue sur $\mathbb{R}$
on note $(E_0): ay''+by'+cy=0$ l'équation homogène associée à (E)
alors les solutions générales de (E) sont de la forme : $y(x)=y_0(x)+f(x)$ où :

- $y_0(x)$ sont les solutions générales de (E_0)
- $f(x)$ est une solution particulière de (E)

exemples :
Résoudre les équations différentielles d'ordre 2 :

- $(E_1): 2y''+3y-5y=-5$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=4$
- $(E_2): y''+4y+4y=2x-4$ avec $y(0)=-1$ et $y'(0)=1$
- $(E_3): y''-4y=x^2-1$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=-4$

solutions :
a) les solutions générales de (E_0) sont : $y(x)=-e^x+2e^{2,5x}$

on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x)=a$
on vérifie facilement que $f(x)=-5$ est solution de (E)

d'où les solutions générales de (E) : $y(x)=-e^x+2e^{2,5x}-5$

b) les solutions générales de (E_0) sont : $y(x)=(-x-1)e^{-2x}$

on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x)=ax+b$
donc $f'(x)=a$ et $f''(x)=0$; on déduit que $0+4\times a+4(ax+b)=2x-4$
soit encore $(4a)x+(4a+4b)=2x-4$
on obtient le système $\begin{cases} 4a=2 \\ 4a+4b=-4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=0{,}5 \\ b=-1{,}5 \end{cases}$

d'où les solutions générales de (E) : $y(x)=(-x-1)e^{-2x}+0{,}5x-1{,}5$

c) les solutions générales de (E_0) sont : $y(x)=-0{,}5e^{2x}+1{,}5e^{-2x}$

on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x)=ax^2+bx+c$
donc $f'(x)=2ax+b$ et $f''(x)=2a$;

on déduit que $(2a)-4(ax^2+bx+c)=x^2-1$
soit encore $(-4a)x^2+(-4b)x+(2a-4c)=x^2-1$

on obtient le système $\begin{cases} -4a=1 \\ -4b=0 \\ 2a-4c=-1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=-0{,}25 \\ b=0 \\ c=0{,}125 \end{cases}$

d'où les solutions générales de (E) : $y(x)=-0{,}5e^{2x}+1{,}5e^{-2x}-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}$

C) Applications des équations différentielles

1) En chimie

Exemple : ***Datation au carbone 14 --> le modèle de Malthus***
On souhaite dater l'âge d'un payrus égyptien ; Soit $x(t)$ le pourcentage d'atomes de ${}^{14}C$ au cours du temps *t* ; on suppose que la variation de la quantité, donc la dérivée $x'(t)$, est proportionnelle à la quantité $x(t)$.
On obtient donc l'équation différentielle : $x'(t)=-1{,}21.10^{-4}.x(t)$
les conditions initiales sont : $x(0)=0{,}013$; Quel est l'âge de ce papyrus sachant que la proportion d'atomes ${}^{14}C$ est de 0,007 ? (rép : 5116 ans)

2) En mécanique

Exemple : ***Loi du refroidissement de Newton***
Un liquide, chauffé initialement à 90º C, est laissé dans une pièce à 21º C. Au bout de 4 minutes, la température de ce liquide est à 82º C. Trouver une formule qui donne la température de ce liquide en fonction du temps.
D'après la loi de refoidissement de Newton : $T'=k(T-21)$
Sachant que $T(0)=90$ et $T(4)=82$ déterminer la formule de T
(rep : $T(t)=21+69e^{-0{,}0308t}$)

Exemple : ***La chute libre***
On lance un objet dont la masse est 8 kg vers le haut, avec une vitesse de 5 m/s, à partir d'une hauteur de 300 m. L'air oppose une résistance à son mouvement, qui vaut 4 fois la vitesse.

a) Déterminer l'expression de la vitesse de cet objet au cours du temps t
b) Combien de temps l'objet prendra-t-il pour atteindre le sol et quelle sera sa vitesse au moment de l'impact ?

D'après la 2ème loi de Newton : $mg+F_r=ma$, $F_r=-4v(t)$, $a=v'(t)$
(Rep : $v(t)=24{,}6e^{-0{,}5t}-19{,}6$ donc $x(t)=349{,}2-19{,}6t-49{,}2e^{-0{,}5t}$)

3) En physique

Exemple : ***Tension aux bornes d'un circouit R-C***
Une résistance $R=8M\Omega$ est branchée en série avec un condensateur de capacité $C=2\mu F$ et une batterie dont la force électromotrice est $E=20V$
À $t=0$, le condensateur est déchargé.

a) Quelle est la tension aux bornes du copndensateur après 2 secondes ?
b) Quelle est la valeur limite de cette tension ?

la *loi de Kirchhoff* amène l'équation différentielle suivante :
$RCU'(t)+U(t)=E$ (rep : $U=2{,}35\,volts$ et $U_l=20\,volts$)

Exemple : Intensité dans un circuit R-L
Une résistance de $R=100\,\Omega$ est branchée en série avec une bobine avec $L=0{,}04H$ et une batterie dont la force électromotrice est $E=2V$
On considère que $i(0)=0$
Quel courant électrique circule-t-il dans ce circuit après 1ms ?

la *loi de Kirchhoff* amène l'équation différentielle suivante :
$Li'(t)+Ri(t)=E$ (rep : $i(0{,}001)=45{,}9\,A$)

4) En démographie

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Verhulst

Exemple : ***la croissance de population des éléphants --> le modèle de Werhulst***

L'éléphant africain de la savane (*loxodonta africana*) se comptait par millions dans la savane africaine avant qu'il ne soit décimé durant des siècles par les chasseurs, notamment pour exploiter l'ivoire de ses défenses et prendre possession de ses territoires à des fins agricoles.

L'idée du modèle logistique, introduit par *Verhulst* en 1836, est la suivante : si la population concernée pouvait croître indéfiniment sans rencontrer aucune limitation de ressource ou d'espace, elle serait décrit par un modèle de *Malthus*
Ainsi *Verhulst* propose l'équation différentielle :
$N'(t)=0{,}15.N(t)(1-\frac{N(t)}{7500})$ où $N(t)$ est le nombre d'éléphants

On obtient les solutions générales : $N(t)=\frac{7500}{1+749e^{-0{,}15t}}$

on remarque que $N(t)$ suit une fonction de type "*logistique*"