Chapitre 3

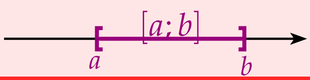
# Intervalles et inégalités

## I. Intervalles de $\mathbb{R}$

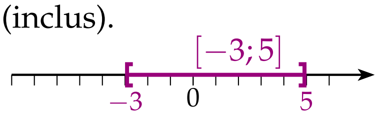
### 1) Définition d'un intervalle

**Définition - Intervalle**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a < b$ :
L'ensemble des réels $x$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'**intervalle** $[\,a\,;\,b\,]$.
Il contient tous les nombres compris entre $a$ (inclus) et $b$ (inclus).
On peut le représenter sur la droite réelle.




**Exemple :** l'intervalle $[\,-3\,;\,5\,]$ contient tous les nombres compris entre $-3$ (inclus) et 5 (inclus).




Donc $1 \in [-3;5]$ $-1 \in [-3;5]$ $12 \notin [-3;5]$ $-5 \notin [-3;5]$ $5 \in [-3;5]$

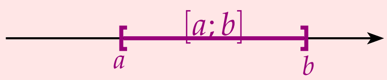
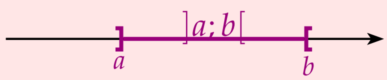
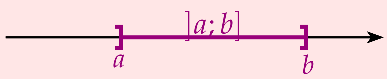
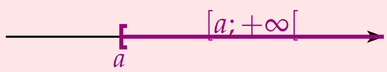
**Remarque :** On utilise les symboles $\in$ "appartient" et $\notin$ "n'appartient pas".

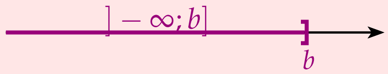
### 2) Différents types d'intervalles

**Définition - Intervalles**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a < b$ :

L'ensemble des réels $x$ tels que :

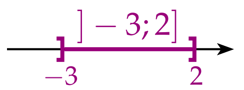
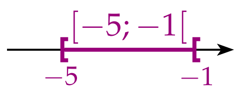
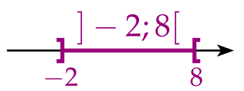
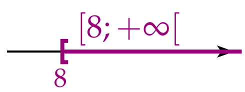
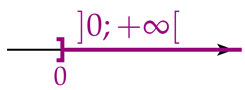
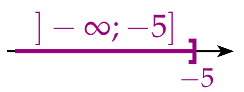
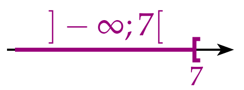
| | | | |
|---|---|---|---|
| $a \leqslant x \leqslant b$ | est l'intervalle | $[a;b]$ |  |
| $a < x < b$ | est l'intervalle | $]a;b[$ |  |
| $a \leqslant x < b$ | est l'intervalle | $[a;b[$ |  |
| $a < x \leqslant b$ | est l'intervalle | $]a;b]$ |  |
| $a \leqslant x$ | est l'intervalle | $[a;+\infty[$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a < x$ | est l'intervalle | $]a;+\infty[$ |   |
| $x \leqslant b$ | est l'intervalle | $]-\infty;b]$ |   |
| $x < b$ | est l'intervalle | $]-\infty;b[$ |   |

**Remarques :**

- $+\infty$ se lit *"plus l'infini"* et $-\infty$ se lit *"moins l'infini"* ,
- l'intervalle $[\,a\,;\,b[$ est **fermé** en $a$ (crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle) : $a \in [\,a\,;\,b[$, et est **ouvert** en $b$ (crochet tourné vers l'extérieur de l'intervalle) : $b \notin [\,a\,;\,b[$,
- On écrit toujours $]-\infty$ et $+\infty[$ (intervalles ouverts).

**Exemple :**

| Inégalité | Signification | Notation | Représentation |
|---|---|---|---|
| $2 \leq x \leq 5$ | $x$ est compris entre **2** (inclus) et **5** (inclus) | $x \in [2\,;\,5]$ |   |
| $-3 < x \leq 2$ | $x$ est compris entre **−3** (exclu) et **2** (inclus) | $x \in ]-3\,;\,2]$ |   |
| $-5 \leq x < -1$ | $x$ est compris entre **−5** (inclus) et **−1** (exclu) | $x \in [-5\,;\,-1[$ |   |
| $-2 < x < 8$ | $x$ est compris entre **−2** (exclu) et **8** (inclus) | $x \in ]-2\,;\,8]$ |   |
| $8 \leq x$ | $x$ est supérieur ou égal à **8** | $x \in [8\,;\,+\infty\,[$ |   |
| $x > 0$ | $x$ est strictement supérieur à **0** | $x \in ]0\,;\,+\infty[$ |   |
| $x \leq -5$ | $x$ est inférieur ou égal à **−5** | $x \in ]-\infty\,;\,-5]$ |   |
| $7 > x$ | $x$ est strictement inférieur à **7** | $x \in ]-\infty\,;\,7[$ |   |

**Remarque** : Dans l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, le nombre $b-a$ s'appelle l'**amplitude** de l'intervalle.

### 3) Intersection et réunion d'intervalles

**Définition**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$,

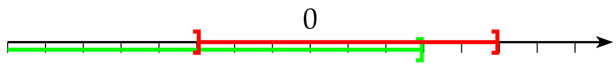
- **L'intersection** des intervalles $I$ et $J$, notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent
  à la fois àl'intervalle $I$ **et** à la fois à l'intervalle $J$ (les deux en même temps)
- **La réunion** des intervalles $I$ et $J$, notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle $I$ **soit** à l'intervalle $J$ soit aux deux (l'un des deux ou les deux).

**Remarques** :

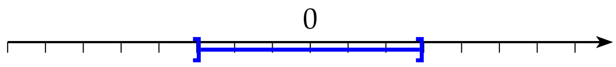
- $\cap$ se lit *inter*
- $\cup$ se lit *union*
- $x \in I \cap J$ se lit $x \in I$ **ET** $x \in J$
- $x \in I \cup J$ se lit $x \in I$ **OU** $x \in J$

**Exemple** :
Soient les intervalles $I = ]-\infty;3]$ et $J = ]-3;5]$, on veut déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

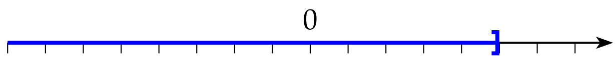
On représente I (en vert) et J (en rouge) sur la droite réelle :




- $I \cap J$ correspond à la partie de la droite colorée en vert **ET** en rouge
  $I \cap J = ]\,-3\,;\,3\,]$




- $I \cup J$ correspond à la partie de la droite colorée en vert **OU** en rouge,
  c'est à dire soit vert, soit rouge, soit les deux.
  $I \cup J = ]\,-\infty\,;\,5\,]$




**Remarque** : $x \neq b$ signifie que $x$ est soit strictement plus petit que $b$, soit strictement plus grand que $b$.
On écrit cet intervalle $]-\infty;b[\cap]b;+\infty[$

**Exemple** : L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ correspond à $x \neq 0$. Il peut s'écrire sous la forme d'une réunion d'intervalles $]\,-\infty\,;\,0\,[\ \cup\ ]\,0\,;\,+\infty[$ ou encore $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

L'expression $\dfrac{4x+5}{x-7}$ est définie pour $x \in ]\,-\infty\,;\,7\,[\ \cup\ ]\,7\,;\,+\infty[$

# II. Inéquations

## 1) Inéquation du premier degré

**Méthode**

Résoudre une inéquation du premier degré Pour résoudre une inéquation du premier degré, on procède comme pour une équation, mais : **Quand on multiplie ou divise les deux côté de l'inéquation par un nombre strictement négatif, on change l'ordre de l'inéquation.**

**Remarque** : L'ensemble des solutions $S$ se présente généralement sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.
Si l'inéquation n'a pas de solution, on note $S = \varnothing$

**Exemple** : Résoudre l'inéquation $-2x + 4 < 3x + 12$

$$\begin{aligned} -2x + 4 &< 3x + 12 \\ -2x - 3x &< 12 - 4 \\ -5x &< 8 \\ x &> -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

**Méthode - Déterminer si un nombre est solution d'une inéquation**

Pour déterminer si un nombre est solution d'une inéquation il suffit de vérifier si, en donnant cette valeur à linconnue, la relation est vérifiée.

**Exemple** : Par calcul mental, déterminer si l'un des nombres parmi $-1$,0 ou 1 est solution de inéquation $x^2 - 1 < -3x + 2$.

$(-1)^2 - 1 = 0$ $\quad -3 \times (-1) + 2 = 5$ $\quad 0 < 5$, donc $-1$ est solution

$(0)^2 - 1 = -1$ $\quad -3 \times 0 + 2 = 2$ $\quad -1 < 2$, donc 0 est solution.

$1^2 - 1 = 0$ $\quad -3 \times 1 + 2 = -1$ $\quad 0 > -1$, donc 1 n'est pas solution

## 2) Valeur interdite

**Méthode**

Il y a deux opérations interdites en seconde : diviser par zéro et prendre la racine carrée d'un nombre négatif.
Pour un quotient, on cherche pour quelles valeurs de $x$ le dénominateur est nul, puis on les exclue du domaine de définition. Pour une racine carrée, on cherche pour quelles valeurs de $x$ l'intérieur de la racine carrée est négatif, et on l'exclue du domaine de définition.

**Exemple** : Trouver les valeurs interdites de :

$A(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$

$(x+3)(x-2) \neq 0$
$(x+3) \neq 0$ ou $(x-2) \neq 0$
$x \neq -3$ ou $x \neq 2$
$D_A = \mathbb{R}\backslash\{-3;2\}$

$B(x) = \dfrac{3x-1}{4x-3}$

$4x - 3 \neq 0$
$4x \neq 3$
$x \neq \dfrac{3}{4}$
$D_B = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ ou
$D_B = \left]-\infty; \dfrac{3}{4}\right[ \cup \left]\dfrac{3}{4}; +\infty\right[$

$C(x) = \sqrt{3x+4}$

$3x + 4 \geqslant 0$
$3x \geqslant -4$
$x \geqslant -\dfrac{4}{3}$
$D_C = \left]-\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$

### 3) Encadrement d'un nombre réel et arrondis

**Méthode**

Donner un encadrement et un arrondi à $10^{-n}$ près Encadrer un nombre c'est le placer entre deux nombres réels, l'un **inférieur ou égal** à ce nombre, et l'autre **strictement supérieur à ce nombre**. L'encadrement à $10^{-n}$ près signifie qu'il y aura $n$ chiffres après la virgule ($n$ chiffres significatifs).
Donner un arrondi d'un nombre à $10^{-n}$ c'est donner une valeur approchée du nombre avec $n$ chiffres significatifs, le dernier chiffre étant éventuellement augmenté de un suivant qu'il est suivi d'un chiffre supérieur ou égal à 5.

**Exemple :** $\dfrac{1}{3} = 0,3333333...$

L'encadrement à $10^{-4}$ près de $\dfrac{1}{3}$ est $0,3333 \leq \dfrac{1}{3} < 0,3334$

L'arrondi à $10^{-4}$ près de $\dfrac{1}{3}$ est $0,3333$.On note : $\dfrac{1}{3} \approx 0,3333$ arrondi à $10^{-4}$ près .

$\sqrt{7} \approx 2.6457513$.
L'encadrement à $10^{-3}$ près est $2,645 \leq \sqrt{7} < 2,646$.
Et $\sqrt{7} \approx 2,646$ arrondi à $10^{-3}$ près

# III. Valeur absolue d'un nombre réel

### 1) Définition

**Définition - Valeur absolue d'un nombre réel**

La **valeur absolue** d'un nombre réel $a$ notée $|a|$ est définie par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

**Exemples :**

- $|\ 5\ | = \mathbf{5}$
- $|\ -10\ | = \mathbf{10}$
- $|\ 1\,234{,}56\ | = 1\,234{,}56$
- $\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$
- $|\ -4\ | = \mathbf{4}$
- $|\ -3{,}098\ | = \mathbf{3{,}098}$
- $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

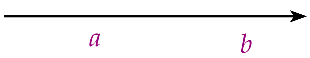
$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si } x-3 < 0 \end{cases} \qquad \text{donc } |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \\ 3-x & \text{si } x-3 < 0 \end{cases}$$

**Remarque :** la valeur absolue d'un nombre est toujours un nombre **positif**.

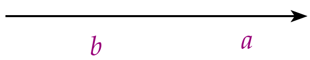
## 2) Distance entre deux nombres réels

Sur une droite graduée munie d'un repère (O,I) on considère le point $A$ d'abscisse $a$ et le point B d'abscisse $b$.

La distance $AB$ est :




AB= $b-a$ si $a \leq b$




AB= $a-b$ si $a \geq b$

**Propriété - Distance et valeur absolue**

Sur une droite graduée munie d'un repère (O,I), soient $A$ et $B$ les points d'abscisse respective $a$ et $b$ : alors la distance AB vaut AB=$|a-b|$

**Exemple :** Calculer la distance entre les nombres $-2,5$ et $7$ puis entre les nombres $-15$ et $-3$.

$\mathbf{AB = 7 - (-2,5) = 7 + 2,5 = 9,5}$ $\mathbf{AB = -3 - (-15) = -3 + 15 = 12}$

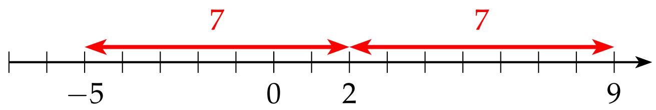
**Remarques :**

- ☞ On note aussi $d(a;b)$ pour donner la distance du nombre réel $a$ au nombre réel $b$.
- ☞ $|\ x-5\ |$ représente la distance du nombre $x$ au nombre 5.
- ☞ $|\ x-5\ | = 3$ veut dire que la distance du nombre $x$ au nombre 5 est égale à 3.

**Exemple :**

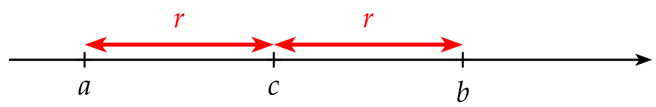
1) Que veut dire |x-2|=7 ? la distance du nombre $x$ au nombre 2 est égale à 7.
2) Quelles sont les solutions de cette équation ? $\mathbf{S = \{2-7;2+7\}} \iff \mathbf{S = \{-5;9\}}$

**3)** Faire un schéma pour représenter la situation.




## 3) Intervalle centré

**Activité :** On considère un intervalle $[a;b]$ avec $a$ et $b$ deux nombres réels.
On appelle centre de l'intervalle $[a;b]$ le nombre $c = \dfrac{a+b}{2}$ et rayon de l'intervalle $[a;b]$ le nombre $r = \dfrac{b-a}{2}$
Graphiquement, on a :




**1)** **a)** Calculer le centre et le rayon de $[2;6]$
$c = \dfrac{2+6}{2} = 4$ et $r = \dfrac{6-2}{2} = 2$

**b)** Que veut dire $|\ x-4\ |$ en termes de distance entre deux réels ? La distance entre le point d'abscisse $x$ et le point d'abscisse 4 est $> 0$ et $= |\ x-4\ |$ .

**c)** Recopier et compléter : $x \in [2;6] \Leftrightarrow |\ x-4\ | \leqslant \mathbf{2}$

**2)** De la même manière, recopier et compléter :

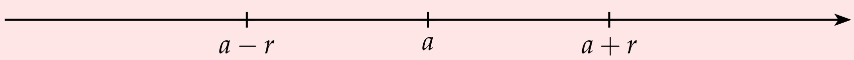
**a)** $x \in [1;25] \Leftrightarrow |\ x-13\ | \leqslant \mathbf{12}$

**b)** $x \in [6;20] \Leftrightarrow \mathbf{|\ x-13\ | \leqslant 7}$

**c)** $x \in [1,2;3] \Leftrightarrow \mathbf{|\ x-2,1\ | \leqslant 0,9}$

**Propriété - Intervalle centré**

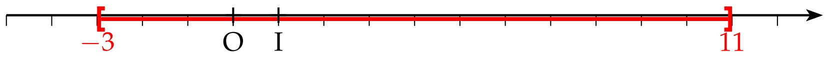
Soit $a$ et $r$ deux réels,
Dire que $x \in [\ a-r\ ;\ a+r\ ]$ est équivalent à dire que $\left|x-a\right| \leq r$.



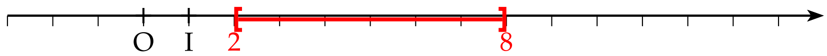

L'intervalle $[\ a-r\ ;\ a+r\ ]$ est l'intervalle **centré** en $a$ et de **rayon** $r$.

**Exemple :**

**1)** Déterminer sous forme d'intervalle l'ensemble des réels $x$ vérifiant $\left|x-7\right| \leq 4$.




**2)** **a)** Représenter l'intervalle $[\,2\,;\,8\,]$ sur la droite réelle.




**b)** Déterminer le centre de cet intervalle et le rayon de cet intervalle.

$c = \dfrac{2+8}{2} = 10$ et $r = \dfrac{8-2}{2} = 3$

**c)** Compléter : $x \in [\,2\,;\,8\,]$ est équivalent à $\boldsymbol{|x - 10| \leqslant 3}$