<u>Le Calcul Intégral – Terminale option maths complémentaire</u>

A) Intégrales et Aires

1) Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.
Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire (on écrit 1 u.a.)

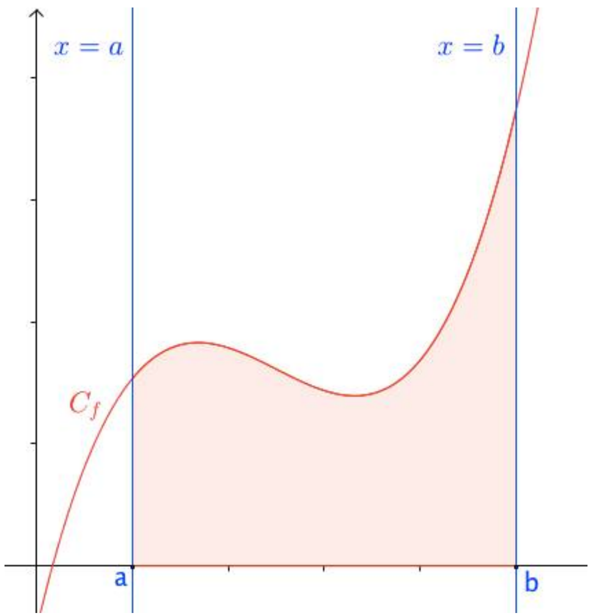
L'aire du rectangle vert est égale a 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale a 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm² par exemple).

2) Intégrale d'une fonction positive

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$
On appelle "***intégrale*** *de f sur [a;b]*" **l'aire** de la partie du plan délimité par :

- La courbe C_f
- l'axe des abscisses (Ox)
- les droites verticales $x=a$ et $x=b$



3) Notation de l'intégrale

Notation : L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ se note $\int_a^b f(x)\,dx$

on lit : "intégrale de *a* à *b* de *f*(*x*) d*x*"

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme <u>s</u>omme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

<u>Remarques :</u>

- *a* et *b* sont les bornes de l'intégrale
- *x* est la variable d'intégration (ou variable "muette") ; elle peut remplacée par toute autre variable ainsi $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$
- la notation "d*x*" signifie "différentielle de *x*" ; en effet nous verrons plus loin dans ce chapitre que intégrale et dérivation sont liés

4) Encadrement de l'intégrale

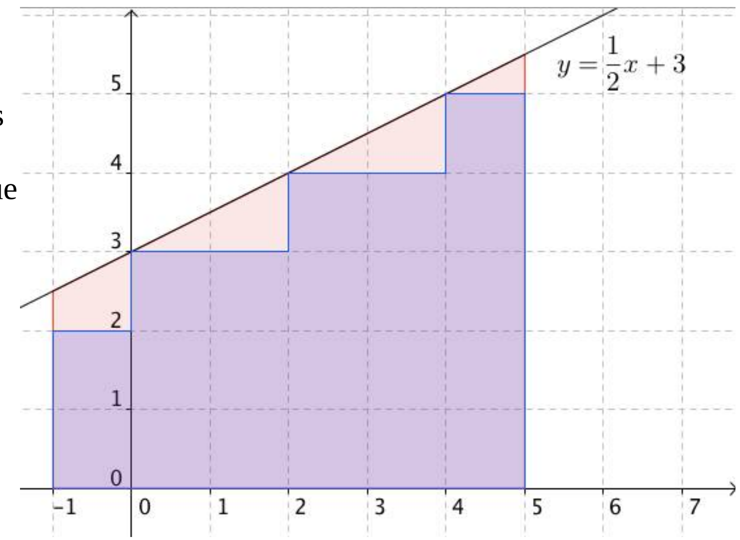
exemples de calculs d'intégrales :

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=jkxNKkmEXZA

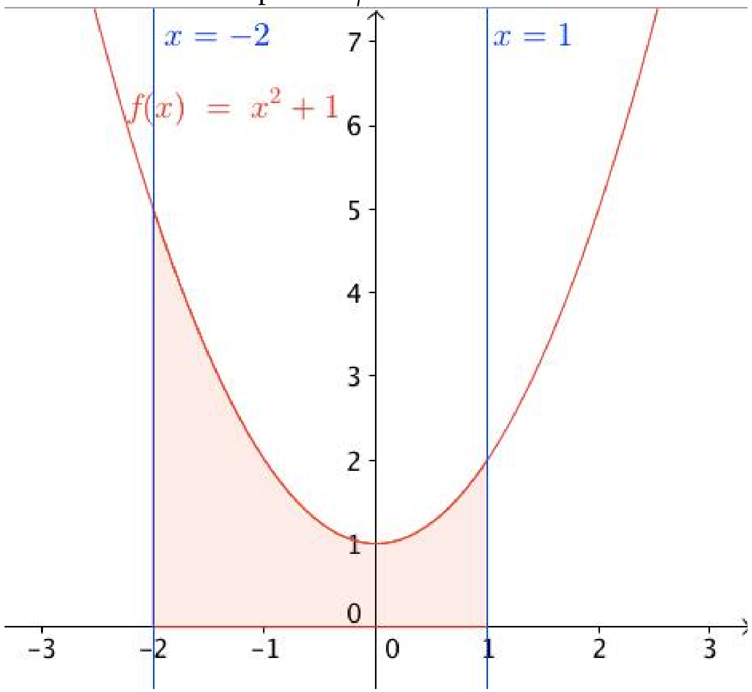
On donne la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ avec $x\in[-1\,;5]$ et on souhaite calculer l'aire "sous la courbe" délimité par C_f

En utilisant les 21 carrés (violets) et les triangles ou trapèzes (oranges) que l'on peut regrouper en 1 carré et 1 rectangle on obtient facilement :

$$\int_a^b f(x)\,dx=24\,u.a.$$

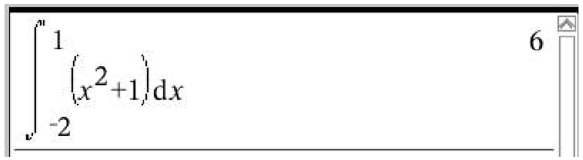


On donne la fonction $f(x)=x^2+1$ avec $x\in[-2\,;1]$ et on souhaite calculer l'aire "sous la courbe" délimitée par C_f



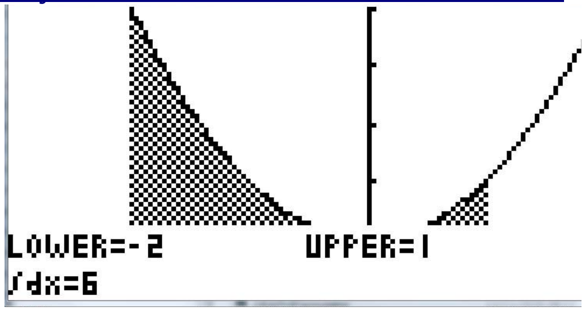
Dans ce cas il est simplement possible d'encadrer cette intégrale ; plusieurs méthodes sont possibles comme la "*méthode des rectangles*" ou la "*méthode des trapèzes*" , cependant il est ici plus simple d'utiliser des outils numériques

Avec un logiciel formel : **XCAS**



Avec une calculatrice : **CASIO**

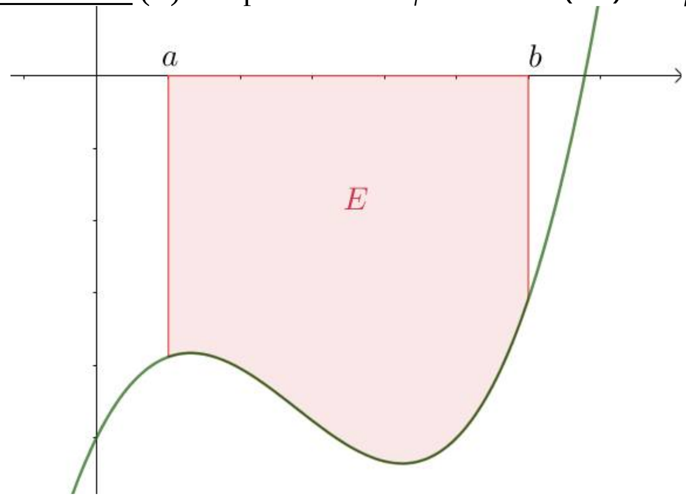
Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=hHxmizmbY_k



5) Intégrale d'une fonction quelconque

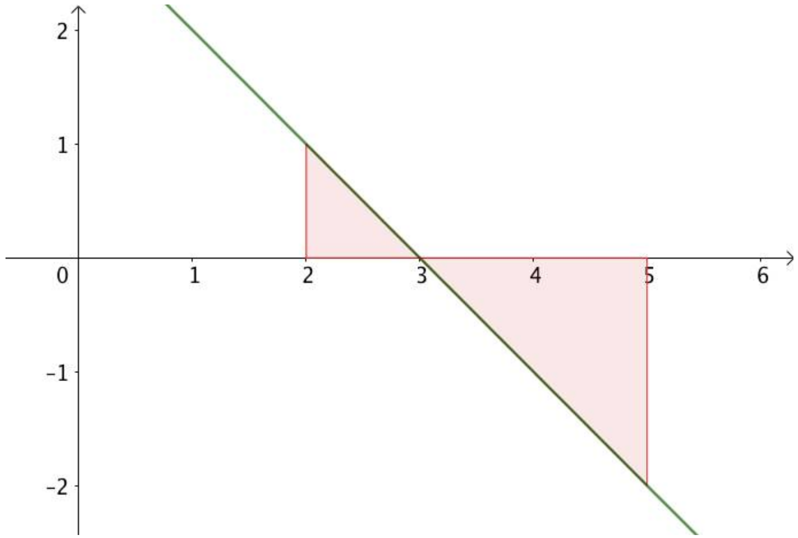
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$; l'intégrale de f sur $[a\,;b]$ est égale à :

- l'Aire compris entre C_f et l'axe (Ox) si f est **positive**
- l'opposé de l'Aire (E) compris entre C_f et l'axe (Ox) si f est **négative**



exemple : soit $f(x)=3-x$ avec $x\in[2\,;5]$;

alors l'intégrale de f de 2 à 5 vaut $\int_2^5 (3-x)\,dx=\frac{1\times 1}{2}-\frac{2\times 2}{2}=-1{,}5$



6) Propriétés algébriques

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

- $\int_a^a f(x)dx=0$: l'aire est nulle sur un ***segment*** !
- $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$: le calcul de l'aire est dépendant de l'***ordre***
- $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$: Relation de ***Chasles***

<u>*remarque*</u> : il est possible d'avoir $\int_a^b f(x)dx=0$

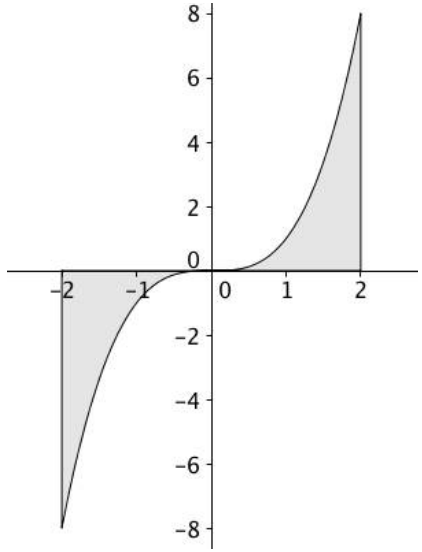
avec $f\neq 0$

En effet soit $f(x)=x^3$ sur $[-2;2]$

alors $\int_{-2}^{2} x^3 dx=\int_{-2}^{0} x^3 dx+\int_{0}^{2} x^3 dx$

or ces 2 aires sont exactement opposées !

Donc $\int_{-2}^{2} x^3 dx=0$



B) Intégrales & Primitives

1) Notion de primitives

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$; on appelle "**Fonction primitive**" ou "**Primitive**" de f une fonction notée F vérifiant $F'(x)=f(x)$

<u>*exemples*</u> :

- si $f(x)=4$ alors $F(x)=4x$ car $(4x)'=4$
- si $f(x)=x$ alors $F(x)=\frac{x^2}{2}$ car $(\frac{x^2}{2})'=x$
- si $f(x)=x^2$ alors $F(x)=\frac{x^3}{3}$ car $(\frac{x^3}{3})'=x^2$
- si $f(x)=x^3$ alors $F(x)=\frac{x^4}{4}$ car $(\frac{x^4}{4})'=x^3$
- si $f(x)=e^x$ alors $F(x)=e^x$ car $(e^x)'=e^x$
- si $f(x)=\frac{1}{x}$ alors $F(x)=\ln(x)$ car $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
- si $f(x)=\frac{1}{x^2}$ alors $F(x)=\frac{-1}{x}$ car $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$

Primitives usuelles :

f est définie sur I par …	Une primitive F est donnée par …	Validité
$f(x)=a$ (a est un réel)	$F(x)=ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	sur $]0\,;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ (n entier, $n>1$)	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	sur $]0\,;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=u'(x)\,e^{u(x)}$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$	$F(x)=e^{u(x)}$	sur $\mathbb{R}$

2) Théorème fondamental

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$
Soit F une primitive de f sur $[a;b]$;
alors $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

<u>*exemples*</u> :

- $f(x)=\frac{3}{x^2}$ → **Vidéo** : **https://www.youtube.com/watch?v=Z3vKJJE57Uw**
- $f(x)=3x^2+4x-5$ → **Vidéo** : **https://www.youtube.com/watch?v=8ci1RrNH1L0**
- $f(x)=e^{-2x}$ → **Vidéo** : **https://www.youtube.com/watch?v=uVMRZSmYcQE**
- $f(x)=\frac{e^x}{e^x+3}$ → **Vidéo** : **https://www.youtube.com/watch?v=BhrCsm5HaxQ**

calculs détaillés :

$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}dx$

On note : $f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \times \frac{1}{x^2}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

Donc :

$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{4}$

$B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$

$= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5$

$= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144$

$C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$

On note : $f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$

$C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1 = F(1) - F(-1)$

$= \frac{1}{-2}e^{-2\times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$

$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2$

$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$

$D = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3}dx$

$= [\ln(e^x + 3)]_0^1$

$= \ln(e^1 + 3) - \ln(e^0 + 3)$

$= \ln(e + 3) - \ln(4)$

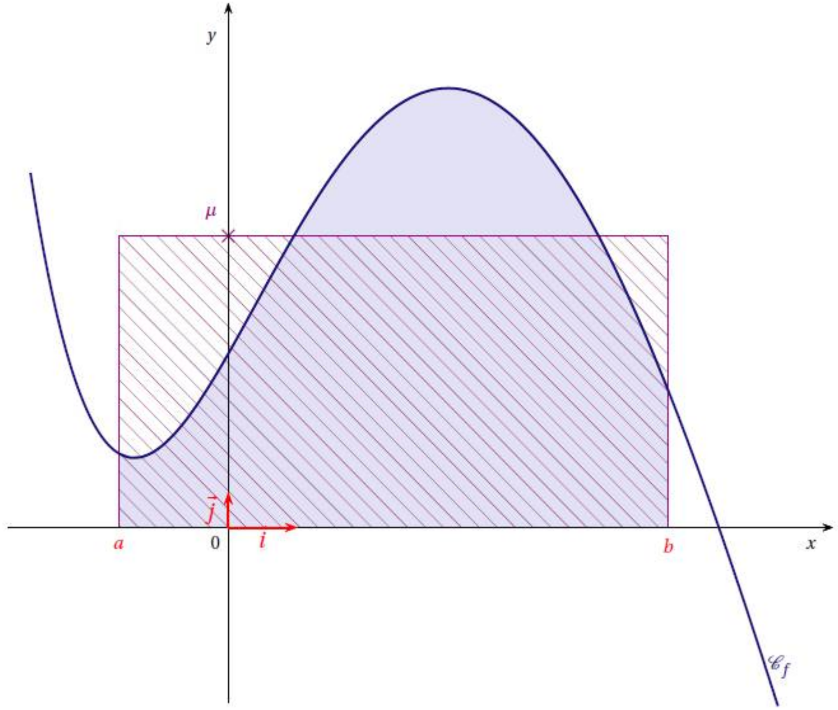
$= \ln\frac{e + 3}{4}$

3) Valeur moyenne

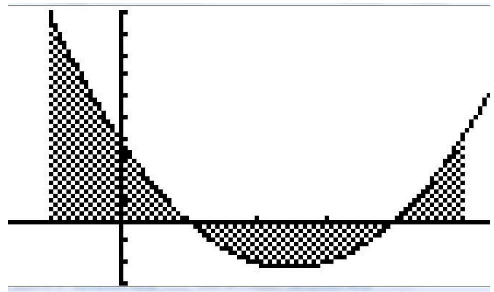
Définition : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$; on appelle « *valeur moyenne* » de f sur $[a\,;b]$ le réel : $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$

Interprétation graphique :

L'aire du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b - a$

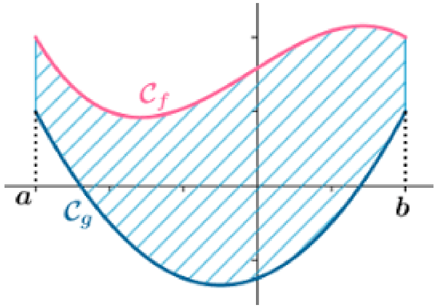


exemple : soit $f(x) = x^2 - 5x + 4$ alors la valeur moyenne de f sur $[-1\,;5]$ est égale à $\mu = \frac{1}{5-(-1)} \times \int_{-1}^{5} (x^2 - 5x + 4)\,dx = \frac{1}{6}.\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^{5} = \frac{6}{6} = 1$



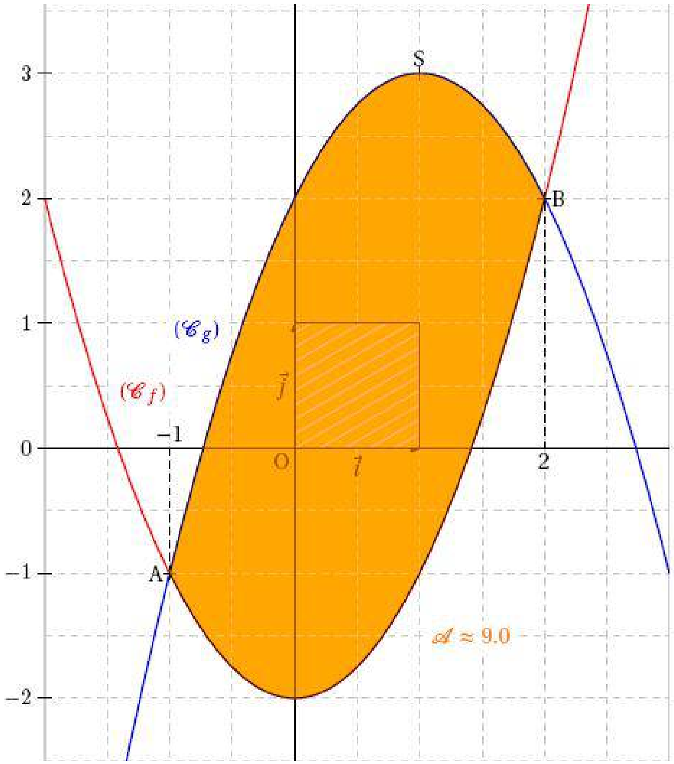
4) Aire entre deux courbes

Théorème : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$; alors l'aire délimitée par les courbes C_f et C_g sur $[a\,;b]$ est égale à $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ si $f \geqslant g$



<u>*exemple*</u> : soit $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=-x^2+2x+2$ avec $x\in[-2\,;3]$ alors l'aire A_1 comprise entre C_f et C_g sur $[-1\,;2]$ vaut :

$$A_1=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=9$$



de même l'aire A_2 comprise entre C_f et C_g sur $[-2\,;-1]$ vaut :

$$A_2=\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-2}^{-1}(2x^2-2x-4)\,dx=\frac{11}{3}$$

aussi l'aire A_3 comprise entre C_f et C_g sur $[2\,;3]$ vaut :

$$A_2=\int_{-2}^{-1}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-2}^{-1}(2x^2-2x-4)\,dx=\frac{11}{3}$$

on en conclut que l'aire A_4 comprise entre C_f et C_g sur $[-2\,;3]$ vaut :

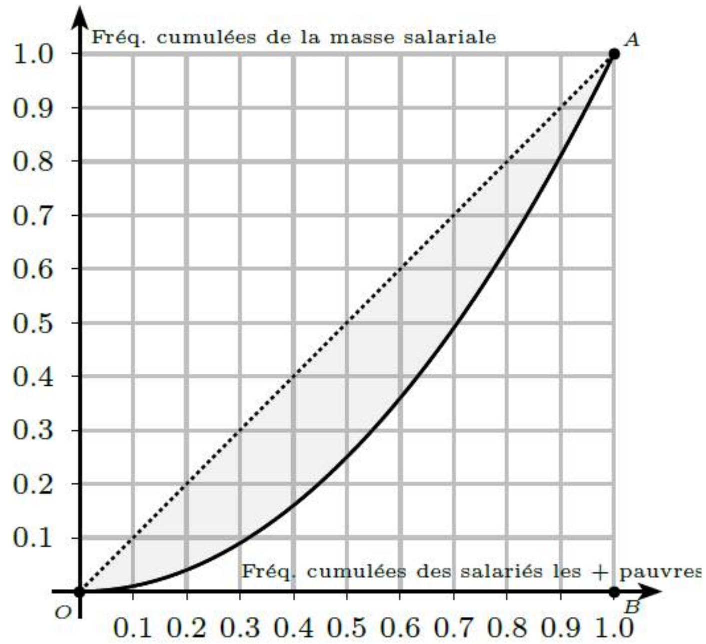
$$A_4=A_2+A_1+A_3=\frac{11}{3}+9+\frac{11}{3}=\frac{49}{3}\,u.a.$$

C) Applications des Intégrales

1) Courbe de Lorenz & Indice de Gini

Afin d'évaluer les inégalités, par exemple salariales dans une entreprise, ***Lorentz*** a eu l'idée de représenter la courbe des fréquences cumulées de la masse salariale en fonction de la fréquence cumulée des salariés les plus pauvres.

<u>*Exemple 1*</u> : On a représenté ci-contre une *courbe de Lorentz* illustrant les inégalités d'une entreprise ;



a) Quel pourcentage de la masse salariale revient aux 50 % des salariés les plus pauvres ?
b) Quel pourcentage de la masse salariale revient aux 10 % des salariés les plus riches ?
c) Quel pourcentage des salariés les plus pauvres paît-on avec la moitié de la masse salariale ?
d) Que peut-on dire de la répartition des salaires de cette entreprise ?

Exemple 2 : On donne le tableau suivant des salaires d'une entreprise :

Salaires (en €)	1124	1561	1969	2149	2257	2365	2473	2977	3559	4060
effectifs	101	83	54	49	33	29	38	16	10	5

a) Calculer les fréquences cumulées des salariés les plus pauvres
b) Calculer les fréquences cumulées des masses salariales
c) En utilisant un ajustement cubique donner l'équation de la courbe $y=f(x)$ où x représente les salariés et y la masse salariale
d) Calculer l'intégrale de f sur $[0;1]$
e) En déduire l'indice de ***Gini*** (indice de référence de la répartition des richesses)

Définition : Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$; alors f représente une ***courbe de Lorentz*** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f(0)=0$ et $f(1)=1$
- f est strictement croissante sur $[0;1]$
- f est positive sur $[0;1]$
- f est convexe sur $[0;1]$

exemples : Vérifier que les fonctions suivantes peuvent représenter des ***courbes de Lorentz*** sur l'intervalle $[0;1]$:

$f(x)=x^2$; $g(x)=x^3$; $h(x)=0{,}2\,x\,e^{1{,}6095\,x}$; $k(x)=32{,}836\,(e^{0{,}03\,x}-1)$

Définition : Soit f une fonction représentant une courbe de Lorentz sur $[0;1]$; on appelle « ***indice de Gini*** » l'indice de répartition des richesses , noté γ ; on a $\gamma=2.\int_0^1 (x-f(x))\,dx$

exemple : en considérant $f(x)=x^2$ comme représentant d'une courbe de Lorentz on obtient : $\gamma=2.\int_0^1 (x-x^2)\,dx\simeq 0{,}33$ soit 33 % d'inégalités

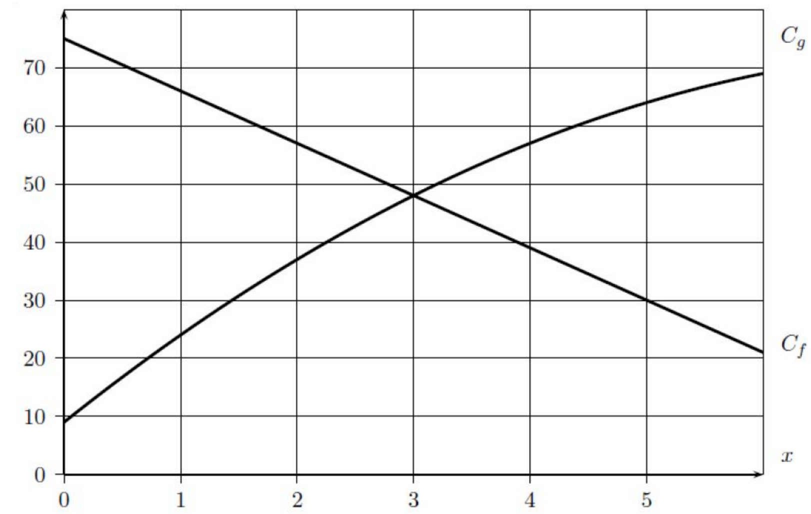
2) Surplus des producteurs et des consommateurs

Définitions : On étudie l'offre et la demande d'un produit du marché ; on note $f(x)$ la fonction correspondant au prix de la demande du produit et $g(x)$ la fonction correspondant au prix de l'offre de ce produit ;

- le **prix d'équilibre** du marché p_e est le prix associé à la quantité q_e où le prix de l'offre est égal au prix de la demande
- le **surplus des consommateurs** est égal à $S_c=\int_0^{q_e} (f(x)-p_e)\,dx$
- le **surplus des producteurs** est égal à $S_p=\int_0^{q_e} (p_e-g(x))\,dx$

exemple 1 : Soit x la quantité (en milliers) disponible d'un article sur le marché

- le prix unitaire (en €) de la demande des consommateurs est modélisé par la fonction $f(x)=-9x+75$ sur l'intervalle $[0;6]$
- le prix unitaire (en €) de l'offre des producteurs est modélisé par la fonction $g(x)=-x^2+16x+9$ sur l'intervalle $[0;6]$

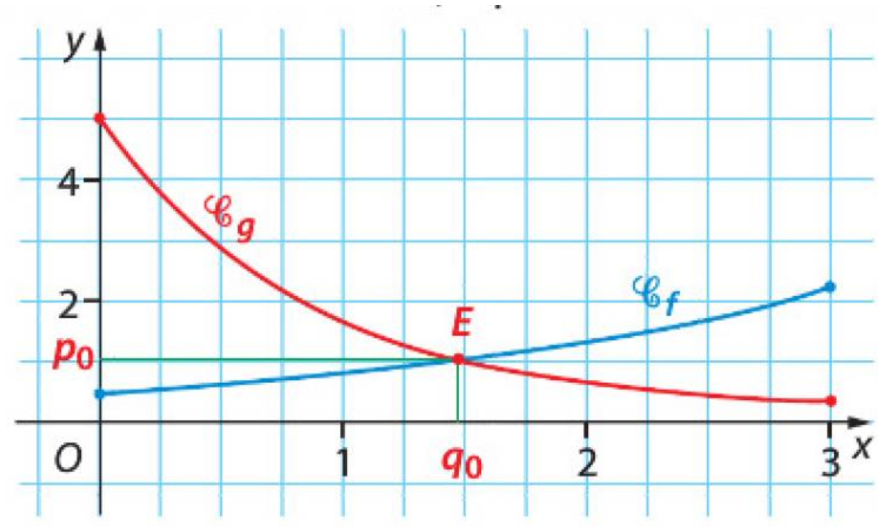


On souhaite étudier les conditions « d'équilibre » de ce marché :

a) Calculer le prix d'équilibre du marché et en déduire p_e et q_e
b) Calculer le surplus des consommateurs S_c
c) Calculer le surplus des producteurs S_p
d) interpréter ces données dans le contexte de l'énoncé

exemple 2 : Soit x la quantité (en milliers) disponible d'un article sur le marché

- le prix unitaire (en €) de la demande des consommateurs est modélisé par la fonction $f(x)=0{,}5e^{0{,}5x}$ sur l'intervalle $[0\,;3]$
- le prix unitaire (en €) de l'offre des producteurs est modélisé par la fonction $g(x)=\dfrac{5}{x^2+x+1}$ sur l'intervalle $[0\,;3]$



On souhaite étudier les conditions « d'équilibre » de ce marché :

a) Calculer le prix d'équilibre du marché et en déduire p_e et q_e
b) Calculer le surplus des consommateurs S_c
c) Calculer le surplus des producteurs S_p
d) interpréter ces données dans le contexte de l'énoncé

3) Valeur efficace dans un transfert d'Énergie

Définition : Soit $x(t)$ un signal électrique périodique de période T au cours du temps t ; on appelle « **valeur efficace** » le réel positif

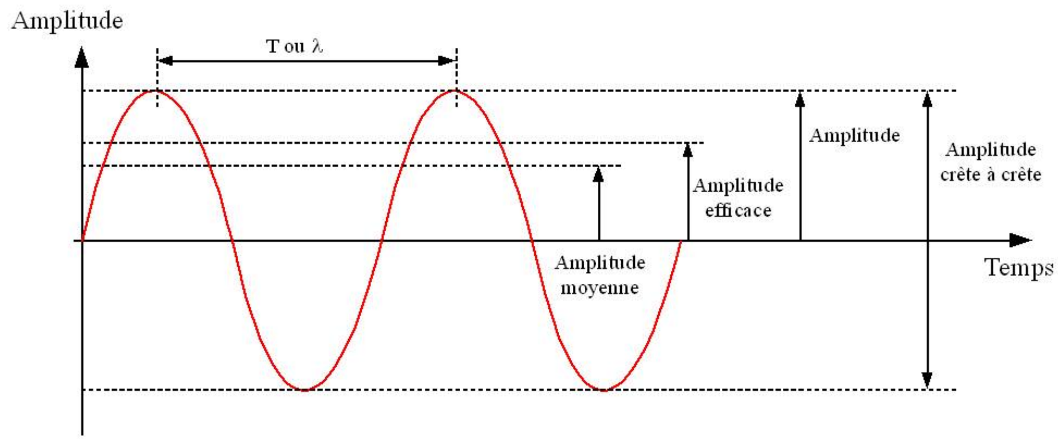
$$X_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\times\int_0^T x^2(t)\,.dt}$$

Source Wikipedia : En électricitée, la valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps, correspond a la valeur d'un courant continu (comprendre intensite constante) ou d'une tension continue (idem constante) qui produirait un echauement identique dans une resistance.

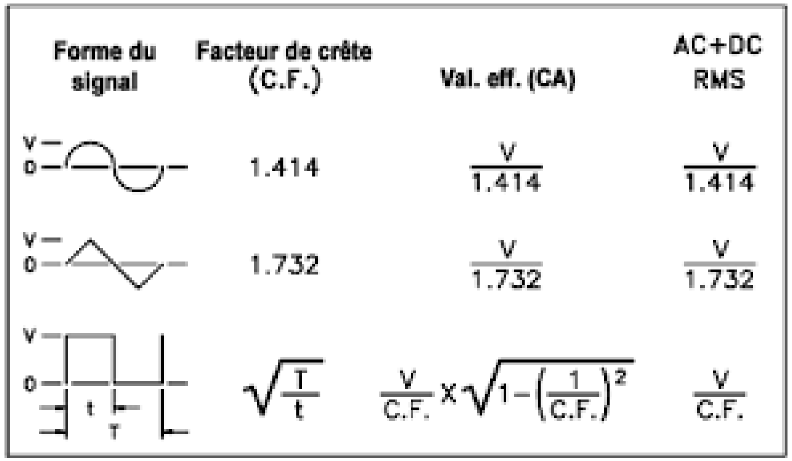
Exemple : ***Calcul de la tension efficace***

Soit la tension alternative : $u(t)=A\cos(\omega t)$ où $A>0$

a) Montrer que la période de la tension u vérifie $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$
b) Montrer que pour tout $\alpha\in[0\,;2\pi]$: $\cos^2(\alpha)=\dfrac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$
c) Déterminer l'expression de $u^2(t)$ en fonction de t
d) En déduire la valeur de la tension efficace et vérifier que $U_{eff}=\dfrac{A}{\sqrt{2}}$



à voir → **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=chZTGBMoeCQ**



Forme du signal	Facteur de crête (C.F.)	Val. eff. (CA)	AC+DC RMS
	1.414	$\frac{V}{1.414}$	$\frac{V}{1.414}$
	1.732	$\frac{V}{1.732}$	$\frac{V}{1.732}$
	$\sqrt{\frac{T}{t}}$	$\frac{V}{C.F.}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{C.F.}\right)^2}$	$\frac{V}{C.F.}$