FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/VJns0RfVWGg

En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».
Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).
Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.
L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe III). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

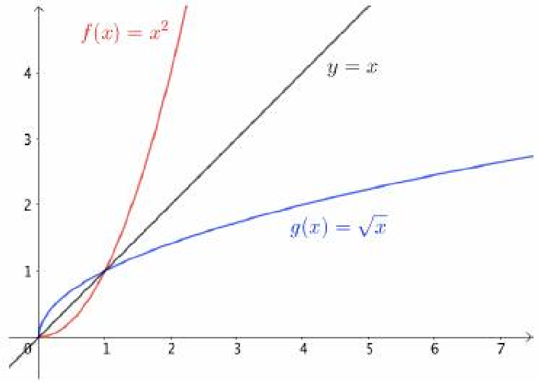
I. Fonction réciproque

Exemple :
Dire que 9 est l'image de 3 par la fonction carré, revient à dire que 3 est l'image de 9 par la fonction racine carrée.
On note : $3^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9} = 3$.

On a également : $5^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{25} = 5$.

De façon générale, pour tout réel a et b positifs, on a : $a^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{b} = a$.

Dans ce cas, on dit que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est réciproque de la fonction $x \longmapsto x^2$ pour des valeurs de x positives.
On dit également que les fonctions carré et racine carrée sont réciproques l'une de l'autre pour des valeurs de x positives.



Les courbes représentatives des fonctions carré et racine carrée sont symétrique l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ pour des valeurs de x positives.

Définition : Soit une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle.
On appelle **fonction réciproque** de f, la fonction g telle que : $f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$.

Propriété : Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Méthode : Déterminer la fonction réciproque d'une fonction

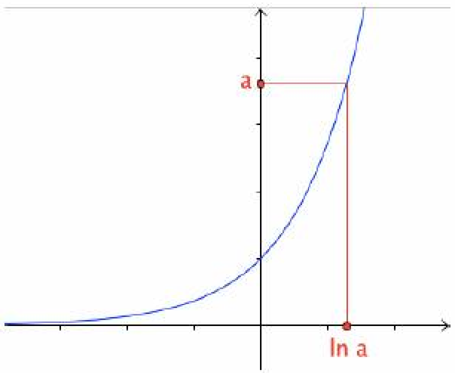
Vidéo https://youtu.be/bglNubYekqo

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.
Déterminer la fonction réciproque de la fonction f.

On pose : $f(a) = b$
Soit : $3a - 4 = b$
$3a = b + 4$
$a = \frac{1}{3}b + \frac{4}{3}$
$\frac{1}{3}b + \frac{4}{3} = a$
Soit encore : $g(b) = a$ avec : $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$
g est la fonction réciproque de la fonction f.

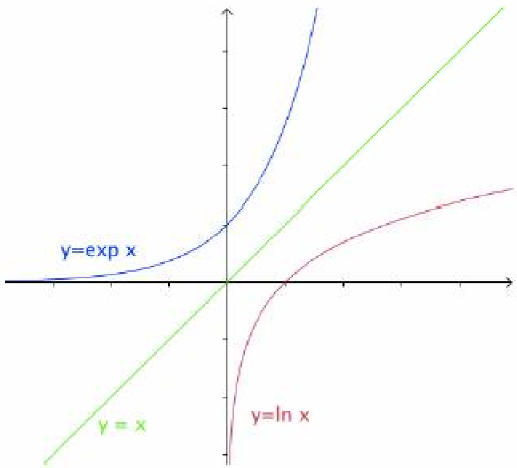
II. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.
La **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction : $\ln :]0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln x$

Propriétés :
- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque :
Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Conséquences :
a) Pour $x > 0$: $y = \ln x \iff x = e^y$
b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \dfrac{1}{e} = -1$
c) $\ln e^x = x$
d) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :
a) Par définition
b) - $e^0 = 1$ donc d'après a. : $\ln 1 = 0$
- $e^1 = e$ donc d'après a. : $\ln e = 1$
- $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ donc d'après a. : $\ln \dfrac{1}{e} = -1$
c) Si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln y = \ln e^x$
d) Si on pose $y = \ln x$, alors $x = e^y = e^{\ln x}$

III. Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Démonstration :
$e^{\ln(x\times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$
Donc : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit :
log(36 x 62) = log(36) + log(62) ≈ 1,5563 + 1,7924 (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
log(36 x 62) ≈ 3,3487

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
...	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
...	
62	1,7924
...	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
...	

2) Conséquences

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

d) $\ln x^n = n\ln x$ avec n entier relatif

Démonstrations :

a) $\ln\frac{1}{x} + \ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\times x\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln\frac{x}{y} = \ln\left(x\times\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$

c) $2\ln\sqrt{x} = \ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x} = \ln\left(\sqrt{x}\times\sqrt{x}\right) = \ln x$ donc $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/HGrK77-SCl4

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $\quad B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ $\quad C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$
$= \ln(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$
$= \ln(9-5) = \ln 4$

$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$
$= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2$
$= \ln\frac{2^3\times 5}{3^2} = \ln\frac{40}{9}$

$C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$
$= 2\ln e - \ln 2 + \ln e$
$= 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2$

3) Équations et inéquations

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE

Vidéo https://youtu.be/GDt785E8TPE

Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2,\ I =]0\,;+\infty[$ $\quad$ b) $e^{x+1} = 5,\ I = \mathbb{R}$

c) $\ln x = \ln(3x+1),\ I =]0\,;+\infty[$ $\quad$ d) $3\ln x - 4 = 8,\ I =]0\,;+\infty[$

e) $\ln(6x-1) \geq 2,\ I = \left]\frac{1}{6}\,;+\infty\right[$ $\quad$ f) $e^x + 5 > 4e^x,\ I = \mathbb{R}$

g) $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0,\ I =]3\,;9[$

a) $\ln x = 2$
$\ln x = \ln e^2$
$x = e^2$

b) $e^{x+1} = 5$
$e^{x+1} = e^{\ln 5}$
$x + 1 = \ln 5$
$x = \ln 5 - 1$

c) $\ln x = \ln(3x+1)$
$x = 3x + 1$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$

Ce qui est impossible car l'équation est définie sur $I =]0\,;+\infty[$.
L'équation n'a pas de solution.

d) $3\ln x - 4 = 8$
$3\ln x = 12$
$\ln x = 4$
$\ln x = \ln e^4$
$x = e^4$

e) $\ln(6x-1) \geq 2$
$\ln(6x-1) \geq \ln e^2$
$6x - 1 \geq e^2$
$6x \geq e^2 + 1$
$x \geq \frac{e^2+1}{6}$

L'ensemble solution est donc $\left[\frac{e^2+1}{6}\,;+\infty\right[$.

f) $e^x + 5 > 4\,e^x$
$e^x - 4\,e^x > -5$
$-3\,e^x > -5$
$e^x < \frac{5}{3}$
$e^x < e^{\ln\frac{5}{3}}$
$x < \ln\frac{5}{3}$
L'ensemble solution est donc $\left]-\infty\,;\,\ln\frac{5}{3}\right[$.

g) $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$
$\ln(x-3)(9-x) = 0$
$\ln(x-3)(9-x) = \ln 1$
$(x-3)(9-x) = 1$
$-x^2 + 12x - 27 = 1$
$-x^2 + 12x - 28 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$

$$x = \frac{-12+\sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad ou \quad x = \frac{-12-\sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$.

Méthode : Déterminer un seuil pour une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/fm1YBGcix0E

On considère la suite la suite (u_n) définie par $u_n = 5 \times 2^n$.
Déterminer le rang n à partir duquel $u_n \geq 10^6$.

La suite (u_n) est une suite géométrique croissante. On cherche donc le plus petit entier n tel que $5 \times 2^n \geq 10^6$.

Soit : $2^n \geq 200\,000$
$\ln 2^n \geq \ln 200\,000$
$n \ln 2 \geq \ln 200\,000$
$n \geq \frac{\ln 200\,000}{\ln 2}$
Or, $\frac{\ln 200\,000}{\ln 2} \approx 17{,}6$
A partir du rang $n = 18$, on a $u_n \geq 10^6$.

IV. Étude de la fonction logarithme népérien

Vidéo https://youtu.be/3KLX-ScJmcI

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Cas de la fonction composée $\ln u(x)$:

Fonction	Dérivée
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$

Méthode : Dériver des fonctions contenant des logarithmes népériens

Vidéo https://youtu.be/-zrhBc9xdRs

a) Dériver la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
b) Dériver la fonction g définie sur $]0;2[$ par $g(x) = \ln(2x - x^2)$.

a) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$

$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $u(x) = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2 - 2x$

$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2-2x}{2x - x^2}$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration :
Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

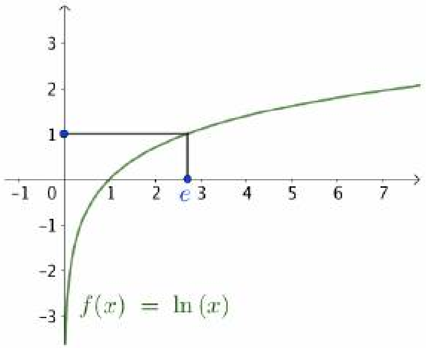
x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$	|| +	
$\ln x$	|| $-\infty$ ↗	$+\infty$

3) Limites aux bornes

Propriétés : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

4) Courbe représentative

Valeurs particulières :
$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$



Méthode : Étudier les variations de fonctions avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,e[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln x$.

- Variations :
Sur $]0\,;\,e[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;\,e[$.

- Limite en 0 :
$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} 2\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} 3 - x = 3$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

- On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		2		e
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1 + 2\ln 2$	$\searrow$	$5 - e$

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln 2$
$f(e) = 3 - e + 2\ln e = 5 - e$.