# Lois de probabilités discrètes

## A) Les Variables aléatoires

### 1) Espérance d'une variable aléatoire

**Définition** : Soit $X$ une variable aléatoire ; les valeurs possibles sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ; les probabilités associées sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ;

Alors l'espérance mathématique de $X$ est $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i . x_i$

On considère l'expérience aléatoire suivante : « Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 1 carte ; la mise de ce jeu est de 1 € »

- si on obtient « un cœur » alors on gagne 3 €
- si obtient « un roi » alors on gagne 6 €
- si on obtient une autre carte alors on ne gagne rien

On note $X$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur

a) Définir les valeurs possibles de $X$
b) Établir la loi de probabilités de $X$
c) Calculer l'espérance mathématique de $X$
d) Interpréter les résultats

*Réponses* :
les valeurs possibles de $X$ sont : $X(\Omega)=\{-1;+2;+5;+8\}$
en effet, si on obtient le « roi de cœur » alors on gagne $6+3-1=8$ €

1er cas : on obtient ni un roi, ni un cœur : $P(X=-1)=\frac{21}{32}$

2eme cas : on obtient ni un cœur mais pas un roi : $P(X=+2)=\frac{7}{32}$

3eme cas : on obtient un roi mais pas un cœur : $P(X=+5)=\frac{3}{32}$

4eme cas : on obtient le roi de cœur : $P(X=+8)=\frac{1}{32}$

On obtient ainsi la loi de probabilités de $X$ :

| $x_i$ | -1 | 2 | 5 | 8 | total |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{21}{32}$ | $\frac{7}{32}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | 1 |

L'espérance mathématique de $X$ est :

$$E(X)=(-1)\times\frac{21}{32}+2\times\frac{7}{32}+5\times\frac{3}{32}+8\times\frac{1}{32}=0{,}5\,€$$

Ainsi $E(X)>0$ donc il s'agit d'un *jeu gagnant*

→ à voir : **Vidéo : [https://www.youtube.com/watch?v=AcWVxHgtWp4](https://www.youtube.com/watch?v=AcWVxHgtWp4)**

### 2) Variance & écart-type

**Définition** : Soit $X$ une variable aléatoire ; les valeurs possibles sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ; les probabilités associées sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ;

Alors la variance de $X$ est $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i.(x_i)^2-(E(X))^2$

Et l'écart-type de $X$ est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Avec l'expérience aléatoire précédente on obtient :

$$V(X)=(-1)^2\times\frac{21}{32}+2^2\times\frac{7}{32}+5^2\times\frac{3}{32}+8^2\times\frac{1}{32}-(0{,}5)^2=24{,}375$$

donc on déduit $\sigma(X)=\sqrt{24{,}375}\simeq 4{,}94$
Ainsi, l'intervalle de confiance du gain algébrique de $X$ se situe dans l'intervalle :

$$[E(X)-\sigma(X);E(X)+\sigma(X)]=[0{,}5-4{,}94;0{,}5+4{,}94]=[-4{,}44;5{,}44]$$

Interprétation : En moyenne, sur un grand nombre de parties, on « espère » gagner entre $-4{,}44$ € et $+5{,}44$ €

### 3) Applications aux théorie des jeux

Soit une variable aléatoire $X$ ;

- Si $E(X)>0$ alors le jeu est « *gagnant* »
- Si $E(X)<0$ alors le jeu est « *perdant* »
- Si $E(X)=0$ alors le jeu est « *équitable* »

## B) Loi Binomiale

### 1) Le schéma de *Bernouilli*

**Définition** : On dit qu'une variable aléatoire réalise un schéma de ***Bernouilli*** si :

- il n'y a que 2 issues possibles : « *succès* » ou « *échec* »
- $P(\text{« succès »})=p$ et $P(\text{« échec »})=q=1-p$
- On note : $X\rightarrow B(p)$

*Exemples* :

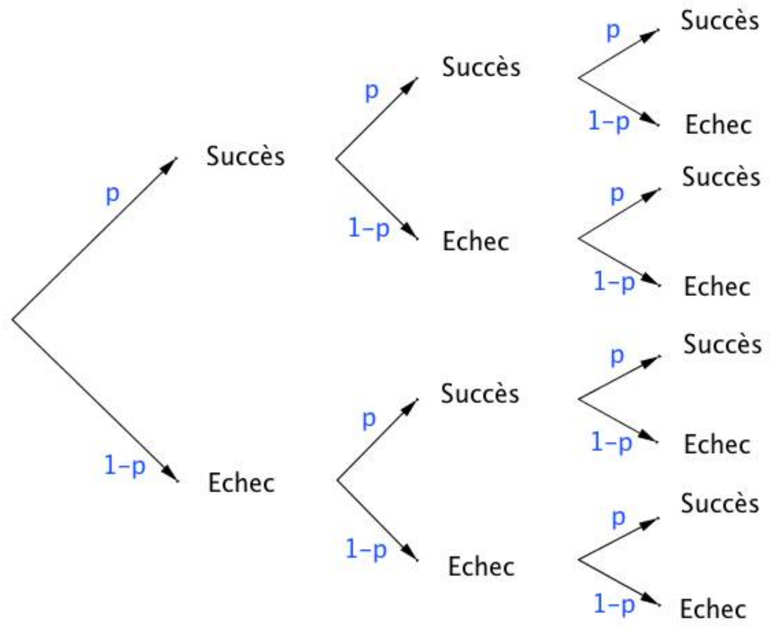
- On lance une pièce de monnaie (truquée ou non truquée)
- On étudie les naissances : garçon ou fille
- On étudie le résultat d'un jeu : gagnant ou perdant

## 2) La loi Binomiale

**Définition** : On dit qu'une variable aléatoire suit une ***loi Binomiale*** si :

- il n'y a que 2 issues possibles : « *succès* » ou « *échec* »
- les $n$ épreuves de ***Bernouilli*** sont toutes indépendantes
- On note : $X \rightarrow B(n\,,p)$

Schéma type : ici on a $X \rightarrow B(3, p)$

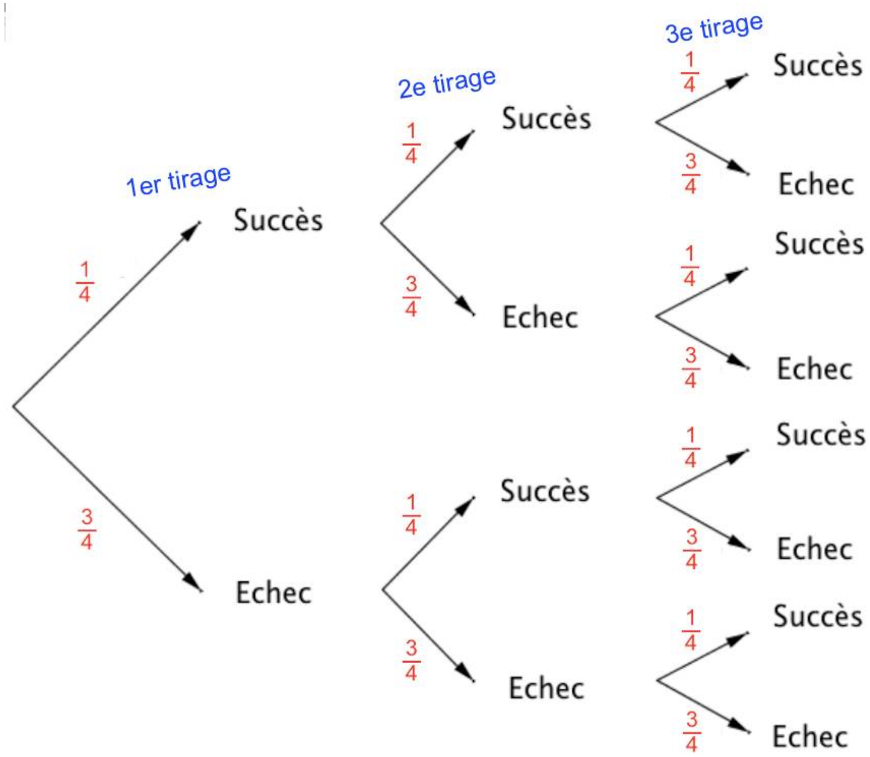



*exemple 1* : On lance 10 fois une pièce truquée de sorte que le « *pile* » apparaît 2 fois plus que le « *face* » ; étudier la loi de probabilité obtenue

*exemple 2* : On étudie le nombre de filles sur 10 couples pris au hasard dans une population sachant que $p(F)=0{,}6$ et $p(G)=0{,}4$

*exemple 3* : On tire 3 fois de suite 1 carte parmi 4 rois et on considère comme « succès » le fait d'obtenir le roi de cœur ;

## 3) Calculs de probabilités




On reprend l'*exemple 3* précédent ; calculer les probabilités suivantes :

- On obtient 1 seul « succès » (1 roi de cœur )
- On obtient exactement 2 « succès » (2 rois de cœur )
- On obtient aucun « succès »
- On obtient au moins 1 « succès »

*Réponses* :

$$p(X=1)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 3=0{,}421875$$

$$p(X=2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times 3=0{,}140625$$

$$p(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times 1=0{,}421875$$

$$p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-0{,}421875=0{,}570125$$

### 4) Utilisation de la calculatrice

→ à voir : **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=69IQIJ7lyww**

*exemple* : On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces ; Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où on obtient un nombre supérieur ou égal à 3

a) Quelle est la loi suivie par $X$ ?
b) Calculer $p(X=5)$
c) Calculer $p(X\leqslant 5)$
d) Calculer $p(X\geqslant 3)$

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.
Le **succès** est d'obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.
La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
$X$ suit donc une loi binomiale de paramètres : $n=7$ et $p=\frac{2}{3}$.

b) Avec Texas Instruments :
Touches « $2^{nd}$ » et « *VAR* » puis choisir « *binomFdP* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFdP(7,2/3,5)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominalePD(5,7,2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)

On trouve $P(X=5)\approx 0{,}31$.
La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

```
Binomial P.D
    p=0.30727023
```

```
Binomial P.D
Data    :Variable
x       :5
Numtrial:7
p       :0.66666666
Save Res:None
Execute
CALC
```

c) Avec Texas Instruments :
Touches « $2^{nd}$ » et « *VAR* » puis choisir « *binomFRép* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFRép(7,2/3,5)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominaleCD(5,7,2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

On trouve $P(X\leq 5)\approx 0{,}74$.
La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

### 5) Représentation graphique

*exemple* : Soit $X$ la variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}4$ ; ainsi $X\rightarrow B(5\,;0{,}4)$

On affiche le tableau des valeurs de la loi de probabilités de $X$ :

Avec Casio :
Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;
Saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

```
Table Func  :Y=
Y1:BinomialPD(X,5,0.4)
```

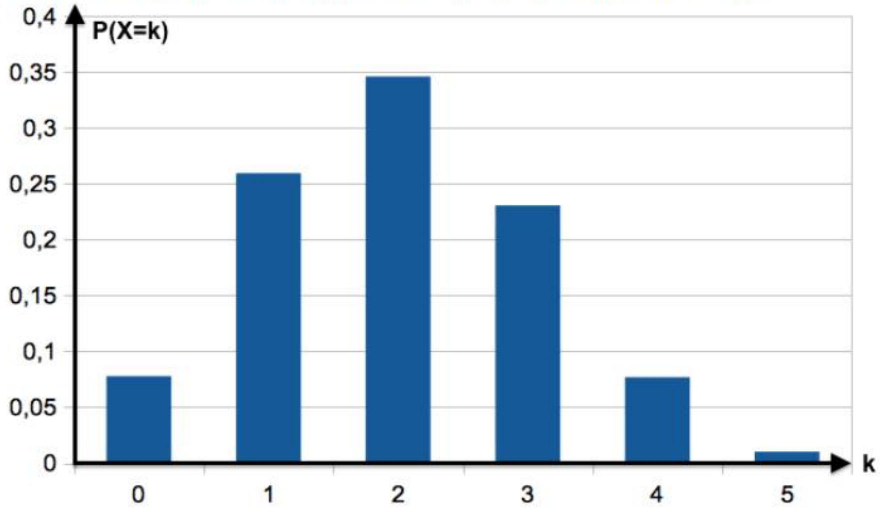
Afficher la table : Touche « *TABL* » :

| X | Y1 |
|---|---|
| 1 | 0.0777 |
| 2 | 0.2592 |
| 3 | 0.3456 |
| 4 | 0.2304 |

Avec le tableur :
Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)
Et copier cette formule vers le bas.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,07776 | | |
| 2 | 1 | 0,2592 | | |
| 3 | 2 | 0,3456 | | |
| 4 | 3 | 0,2304 | | |
| 5 | 4 | 0,0768 | | |
| 6 | 5 | 0,01024 | | |

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :




### 6) Les coefficients binomiaux

Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ? On dit aussi : « Combien existe-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ? »

- (Succès ; Succès ; Échec)
- (Succès ; Échec ; Succès)
- (Échec ; Succès ; Succès)

Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

Définition : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètre $n$ et $p$.
On appelle **coefficient binomiale** ou **combinaison de $k$ parmi $n$**, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins conduisant à $k$ succès parmi $n$ épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

Propriétés : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Avec la calculatrice :
Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice. La fonction se nomme "***combinaison***" ou "***nCr***".
Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisie : 25***combinaison***24 ou 25***nCr***24 suivant le modèle de calculatrice.

Avec un tableur :
La fonction se nomme "***COMBIN***".
Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisie : =***COMBIN***(25;24)

### *Le Triangle de Pascal*

Propriété du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Démonstration pour $n = 5$, $k = 3$ : $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

Il y a deux types de chemins comportant 3 succès parmi 5 épreuves, $\binom{5}{3}$ :

- Ceux qui commencent par un succès : il y en a 2 parmi 4, soit $\binom{4}{2}$.
  En effet, dans l'arbre, il reste à dénombrer 2 succès parmi 4 expériences.
- Ceux qui commencent par un échec : il y en a 3 parmi 4, soit $\binom{4}{3}$.
  En effet, dans l'arbre, il reste à dénombrer 3 succès parmi 4 expériences.

Ces deux types de chemins sont disjoints, donc : $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

→ à voir : **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=6JGrHD5nAoc**

*Blaise Pascal* (1623 ; 1662) fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui "triangle de Pascal". Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois *Zhu Shi Jie* (XIIe siècle). Ci-contre, le triangle de *Zu Shi Jie* extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).

↓ Exemple pour $\binom{4}{2}$

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | $\binom{4}{2}$ =6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

↑ Exemple pour $\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$.

### 7) Paramètres de la loi Binomiale

***Calcul des probabilités***

2)

Propriété : Soit une variable aléatoire $X$ qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}P(X=3) &= \binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(1-\frac{5}{12}\right)^{4-3}\\ &= \binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^{4-3}\\ &= \binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \frac{7}{12}\\ &= \binom{4}{3} \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12}\\ &= \binom{4}{3} \times \frac{875}{20736}\end{aligned}$$

***Espérance*** d'une loi Binomiale

Exemple :

On lance 5 fois un dé à six faces.

On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire $X$ donnant le nombre de succès.

On a donc : $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.

Propriété : Soit la variable aléatoire $X$ qui suit la loi binomiale de paramètre $n$ et $p$.

On a : $E(X) = n \times p$

Ainsi :

$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$

On peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

→ à voir : **Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=95t19fznDOU**

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

On répond au hasard à chaque question. Quelle note peut-on espérer obtenir ?

Soit $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.

$X$ suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$.

$E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

On peut espérer obtenir $\frac{8}{3}$ bonnes réponses en répondant au hasard.

On peut donc espérer obtenir $\frac{8}{3} \times 0{,}5 = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ point en répondant au hasard.