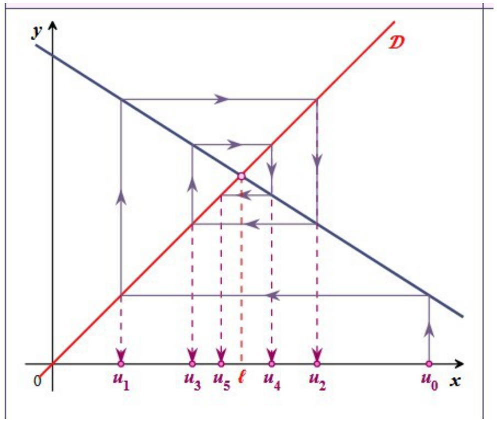
Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; La suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = a.u_n + b, n \in \mathbb{N}$ et de terme initial u_0, est une suite arithmético-géométrique.

Représentation graphique

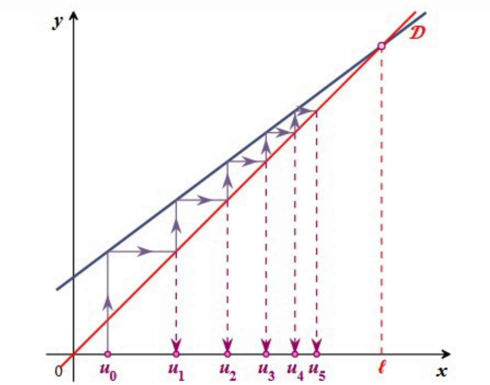
On trace (en **bleu**) la droite représentant la fonction affine $f(x) = a\,x + b$ et (en **rouge**) la droite ($\mathcal{D}$) d'équation $y = x$.
Soit ℓ l'abscisse du point d'intersection des deux droites.



1er cas : $-1 < a < 0$, on pose $u_{n+1} = -0{,}8\,u_n + 18$ et $u_0 = 20$

Conjecture : $\ell = 10$

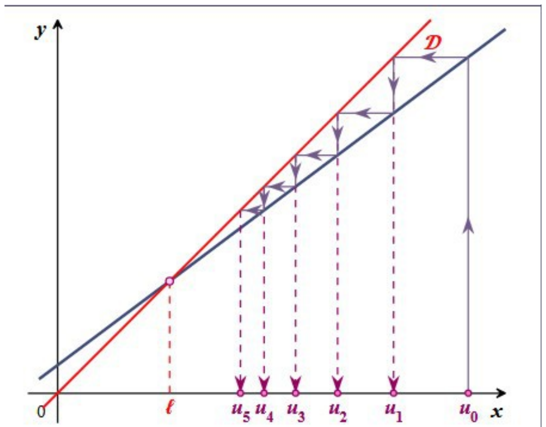
La suite (u_n) n'est pas monotone ($a < 0$) et semble converger vers ℓ.



2ème cas : $0 < a < 1$, on pose $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 10$ et $u_0 = 2$

Conjecture : $\ell = 20$

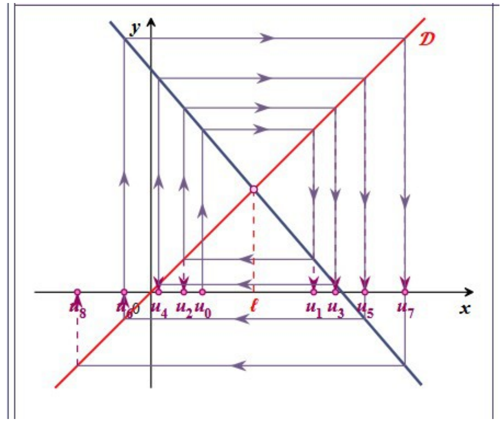
$u_0 < \ell$, la suite (u_n) semble croissante et converger vers ℓ.



3ème cas : $0 < a < 1$, on pose $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$ et $u_0 = 20$

Conjecture : $\ell = 4$

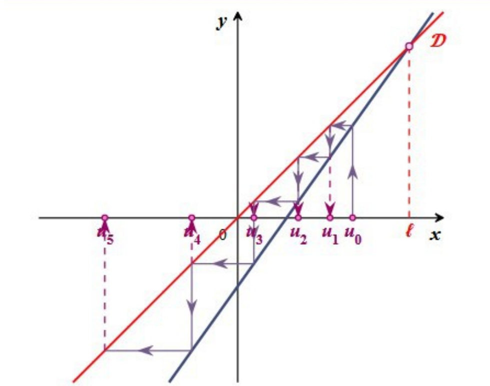
$u_0 > \ell$, la suite (u_n) semble décroissante et converger vers ℓ.



4ème cas : $a < -1$, on pose $u_{n+1} = -1{,}2\,u_n + 22$ et $u_0 = 8$

Conjecture : $\ell = 10$

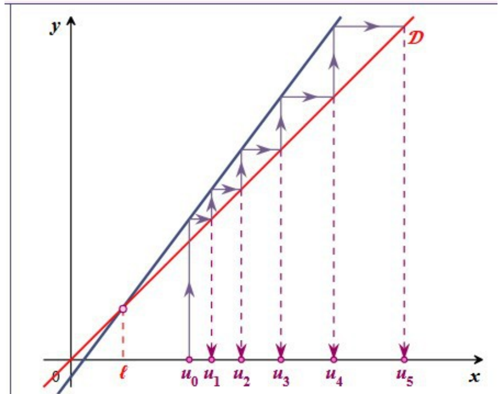
La suite (u_n) n'est pas monotone ($a < 0$) et n'a pas de limite.



5ème cas : $a > 1$, on pose $u_{n+1} = 1{,}4\,u_n - 10$ et $u_0 = 20$

Conjecture : $\ell = 25$

$u_0 < \ell$, la suite (u_n) semble décroissante et avoir pour limite $-\infty$.



6ème cas : $a > 1$, on pose $u_{n+1} = 1{,}4\,u_n - 2$ et $u_0 = 8$

Conjecture : $\ell = 5$

$u_0 > \ell$, la suite (u_n) semble croissante et avoir pour limite $+\infty$.

Une suite auxiliaire

Soient (u_n) la suite de terme initial u_0 définie pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = a.u_n + b, n \in \mathbb{N}$ et ℓ le réel solution de l'équation $a\ell + b = \ell$.

La suite (v_n) définie pour tout entier naurel n, par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.