LES SUITES (Partie 1)

I. Comportement à l'infini des suites géométriques

1) Rappels

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1}=q\times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1}=3u_n$ et $u_0=5$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 5.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0\times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a pour tout n : $u_n=5\times 3^n$.

2) Limites d'une suite géométrique

q	$0\leq q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	0	1	$+\infty$

Exemples :

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n=+\infty ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0 ; \lim_{n\to+\infty}\left(1+0,5^n\right)=1$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/F-PGmIK5Ypg
Vidéo https://youtu.be/2BueBAoPvvc

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3}=? \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=?$$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ car $q=2>1$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3}=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ car $0\leq q=\frac{1}{5}<1$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=1$

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/rlaYMXPbWE8

Calculer la somme S suivante : $S=1+3+3^2+\ldots+3^{13}$

$$S=1+3+3^2+\ldots+3^{13} \quad =\frac{1-3^{14}}{1-3} \quad =2391484$$

4) Limite de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Méthode : Calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XTftGHfnYMw

Vidéo https://youtu.be/6QjMEzEn5X0

1) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_0=4$.
On note $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$. Calculer la limite de la suite (S_n).

Solutions :
1) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

Donc : $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, car $0\le q=\frac{1}{2}<1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$.

2) $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$
$=4+4\times0{,}2+4\times0{,}2^2+\ldots+4\times0{,}2^n = 4\left(1+0{,}2+0{,}2^2+\ldots+0{,}2^n\right)$
$4\times\frac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2} = 5\times\left(1-0{,}2^{n+1}\right)$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n+1}=0$ car $0\le q=0{,}2<1$ Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-0{,}2^{n+1}\right)=1$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\times\left(1-0{,}2^{n+1}\right)=5$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=5$.

Méthode : Modéliser un problème à l'aide d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XcszOqP9sbk

Un entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30 % chaque mois.

1) Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.
2) Que peut-on penser de l'évolution de la somme total du capital investi dans un futur éloigné ?

Solutions :

1) On note (u_n) le capital injecté au n -ième mois alors $u_{n+1}=0{,}7\,u_n$.
(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q=0{,}7$ et de premier terme $u_0=20000$.
Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{11}$
$= 20000+20000\times0{,}7+20000\times0{,}7^2+\ldots+20000\times0{,}7^{11}$
$= 20000\times\left(1+0{,}7+0{,}7^2+\ldots+0{,}7^{11}\right) = 20000\times\frac{1-0{,}7^{12}}{1-0{,}7}$
≈ 65744

2) Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
En reprenant le principe des calculs effectués dans la question 1, on obtient :
$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots u_n = 20000\times\frac{1-0{,}7^{n+1}}{1-0{,}7}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^{n+1}=0$ car $0<0{,}7<1$
Ainsi :
$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 20000\times\frac{1-0{,}7^{n+1}}{1-0{,}7}=20000\times\frac{1}{1-0{,}7}=\frac{20000}{0{,}3}\approx 66\,666{,}67$

Dans un futur éloigné, la somme totale du capital investi tend à se rapprocher de 66666,67 €.

II. Les suites arithmético-géométriques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier n , on a : $u_{n+1}=a u_n+b$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite arithmético-géométrique

Vidéo https://youtu.be/6-vFnQ6TghM
Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY
Vidéo https://youtu.be/EgYTH79sDfw

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an.
Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n .
On a alors : $u_{n+1}=1{,}03u_n+300$ et $u_0=5000$.

1) Calculer u_1 et u_2 .
2) Démontrer que la suite (c_n) définie pour tout entier n par $c_n=-10000$ vérifie la relation de récurrence de (u_n) .

3) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n=u_n-c_n$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

4) Exprimer v_n en fonction de n .
5) En déduire u_n en fonction de n . Puis calculer u_{10} .
6) Étudier les variations de (u_n) .
7) Calculer la limite de (u_n) .

Solutions :

1) $u_1=1{,}03u_0+300=5450$
$u_2=1{,}03u_1+300=5913{,}5$

2) $1{,}03c_n+300=1{,}03\times(-10000)+300=-10300+300=-10000=c_{n+1}$

3) $v_n=u_n-c_n=u_n+10000$,
soit : $v_{n+1}=u_{n+1}+10000$
$=1{,}03u_n+300+10000 = 1{,}03u_n+10300 = 1{,}03(v_n-10000)+10300$
, car $v_n=u_n+10000$
$=1{,}03v_n-10300+10300 = 1{,}03v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0=u_0+10000=5000+10000=15000$.

4) Pour tout n , $v_n=15000\times1{,}03^n$.

5) Pour tout n , $u_n=v_n-10000=15000\times1{,}03^n-10000$
On a alors : $u_{10}=15000\times1{,}03^{10}-10000\approx10158{,}75$

6) Pour tout n ,
$u_{n+1}-u_n=15000\times1{,}03^{n+1}-10000-(15000\times1{,}03^n-10000)$
$=15000\times(1{,}03^{n+1}-1{,}03^n)$
$=15000\times1{,}03^n\times(1{,}03-1)$
$=450\times1{,}03^n>0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}1{,}03^n+\infty$, car $q=1{,}03>1$
Donc $\lim\limits_{n\to\infty}15000\times1{,}03^n+\infty$
Et donc : $\lim\limits_{n\to\infty}15000\times1{,}03^n-10000+\infty$ soit $\lim\limits_{n\to\infty}u_n+\infty$

2) Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Théorème :
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n , on a : $u_n\in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L)=L$. - Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$

Vidéo https://youtu.be/L7bBL4z-r90
Vidéo https://youtu.be/LDRx7aS9JsA (Cas d'une suite quelconque)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie par $f(x)=0,85x+1,8$.

1) a) Calculer u_1.
b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation et $y=x$.
c) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
d) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

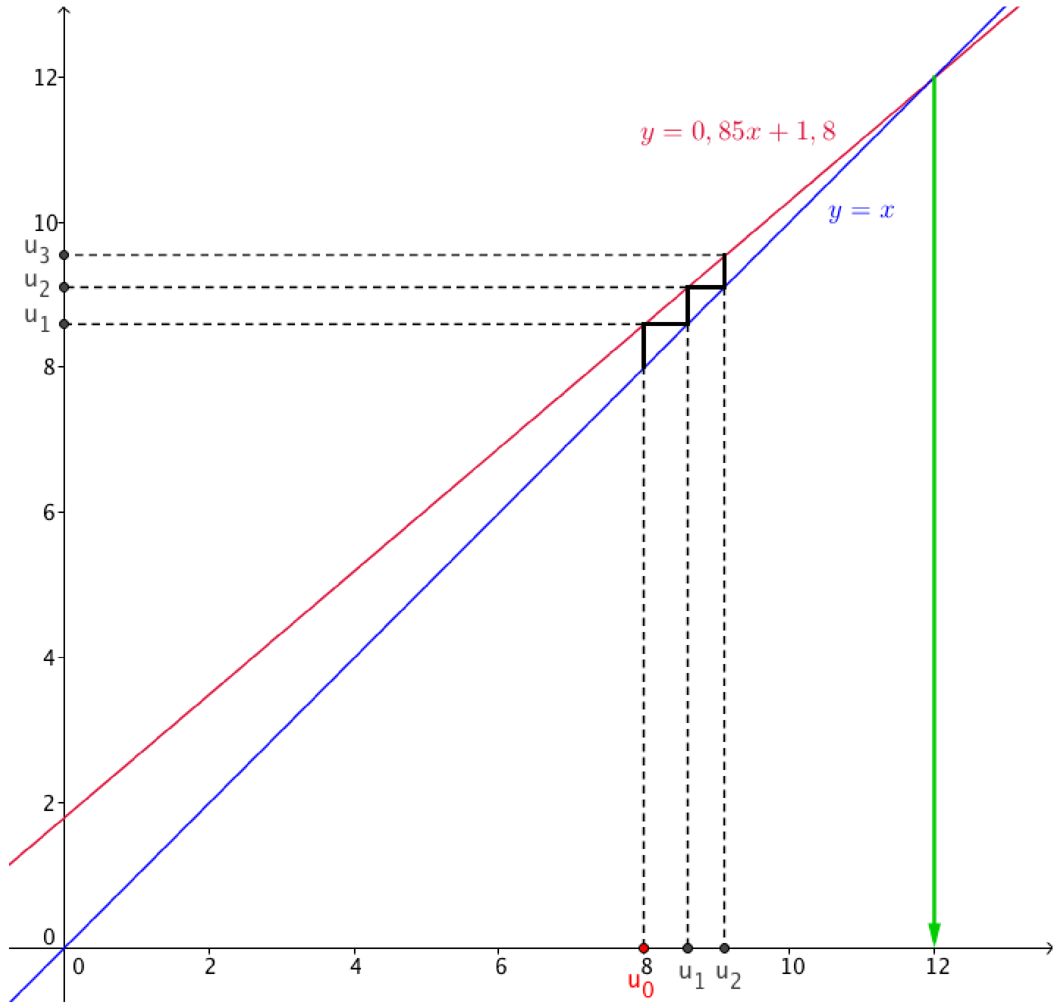
1) a) $u_1=f(u_0)=0,85u_0+1,8=0,85\times 8+1,8=8,6$

b) c) méthode de construction :

- On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1=f(u_0)$.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y=x$.
- On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3 …
d) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2) La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur R.
La limite L de la suite (u_n) vérifie $f(L)=L$.

Soit : $0,85L+1,8=L$ donc $L-0,85L=1,8$ donc $0,15L=1,8$
$L=1,8:0,15=12$



Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/bRIvVs9KZuk

Vidéo Casio https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ

Vidéo HP https://youtu.be/wML003kdLRo