Ex 1 : étude d'une fonction polynôme

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^4+2x^2+1$

$$f'(x)=-4x^3+4x=(4x)(1-x^2)=(4x)(1-x)(1+x)$$

$f'(x)=0$ si $(4x)(1-x)(1+x)=0$ soit pour $x=-1$ ou $x=0$ ou $x=1$

le signe de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

on en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Interprétations :

- f admet un minimum local en $x=0$
- f admet 2 maxima locaux en $x=-1$ et en $x=1$
- f admet un maximum global en $y=2$
- C_f admet un axe de symétrie d'équation $x=0$

Ex 2 : étude d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+2}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(x^2-2x+2)-(x^2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2x^3-4x^2+4x-2x^3+2x^2}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{(2x)(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ donne $(2x)(2-x)=0$ soit $x=0$ ou $x=2$

le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(2x)(2-x)$

on en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↘	0	↗	2	↘	1

Interprétations :

- f admet un minimum local en $x=0$
- f admet 1 maximum local en $x=2$
- f admet un minimum global en $y=0$
- f admet un maximum global en $y=2$
- C_f admet une droite asymptote d'équation $y=1$
- C_f admet un centre de symétrie en $A(1;1)$

Ex 3: étude d'une fonction irrationnelle

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

f est dérivable sur sur $]-\infty;-4[\cup]2;+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-8}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$; f' ne s'annule pas car $-1\notin D_f$

$f'(x)$ est du signe de $x+1$ donc on en déduit le tab de variations de f

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
signe de f'		$-$	‖	X	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0 |	X	| 0	↗	$+\infty$

Interprétations :

- f n'admet aucun extremum local
- f admet un minimum global en $y=0$
- C_f admet une droite asymptote d'équation $y=x+1$
- C_f admet une droite asymptote d'équation $y=-x-1$
- C_f admet un axe de symétrie d'équation $x=-1$