DM 4 - Géométrie dans la Plan - 2nde9

Correction 1

1. Voici les coordonnées des quatre points de cette figure :

$A(-2\,;2)$; $(0\,;-2)$; $(3\,;1)$; $(1\,;5)$

2. (a.) Le milieu K du segment $[AC]$ a pour coordonnée :

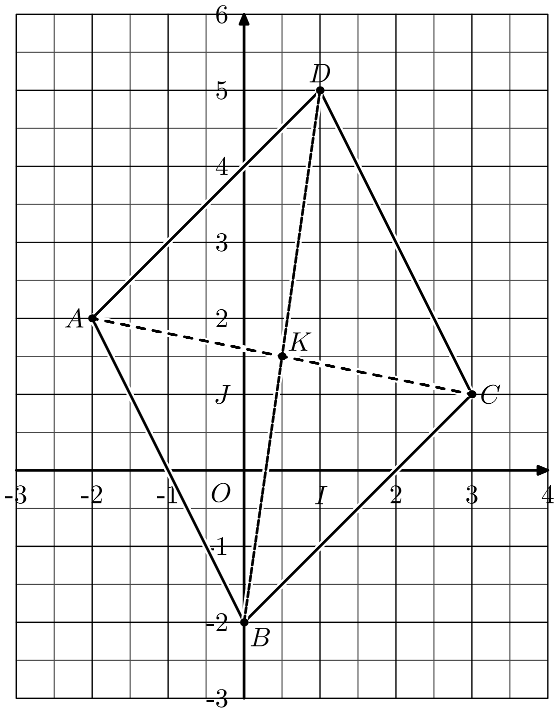
$$K\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{-2+3}{2}\,;\frac{2+1}{2}\Big)=\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\Big)$$

(b.) Le milieu L du segment $[BD]$ a pour coordonnée :

$$L\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)=\Big(\frac{0+1}{2}\,;\frac{(-2)+5}{2}\Big)=\Big(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\Big)$$

3. On remarque que les points K et L ont même coordonnée, ils sont confondus : $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leurs milieux.

Le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieurs alors c'est un parallélogramme.
On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.



Correction 2

1. On a les longueurs suivantes :

- $$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$
- $$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

On en déduit l'égalité suivante : $AB=AC$.
Le triangle ABC est un triangle isocèle en A.

2. On a les calculs suivants de longueur :

- $$DE=\sqrt{(x_E-x_D)^2+(y_E-y_D)^2}=\sqrt{\big(-2-(-3)\big)^2+\big(-2-(-1)\big)^2}=\sqrt{(+1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
- $$DF=\sqrt{(x_D-x_F)^2+(y_D-y_F)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

L'expression de la distance DF admet également la simplification :
$DF=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

- $$EF=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}=\sqrt{\big(0-(-2)\big)^2+\big(2-(-2)\big)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

La longueur EF admet aussi pour expression simplifiée :
$EF=\sqrt{2^2\times5}=2\sqrt{5}$

On remarque l'égalité suivante : $EF^2=DE^2+DF^2$
Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore alors ce triangle est un triangle rectangle. *(ce raisonnement revient à utiliser la réciproque du théorème de Pythagore)*
Le triangle DEF est un triangle rectangle en D.

Correction 3

1. On a :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

2. Les coordonnées du point K, milieu du segment $[AC]$, sont données par la formule :

$$K\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big)=\Big(\frac{2+1}{2}\,;\frac{1+(-3)}{2}\Big)=\Big(\frac{3}{2}\,;\frac{-2}{2}\Big)=\Big(\frac{3}{2}\,;-1\Big)$$

3. En utilisant la propriété suivante :

> *“Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leurs milieux.”*

Il est donc nécessaire que le point D soit placé tel que les deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ aient pour milieux le point K.

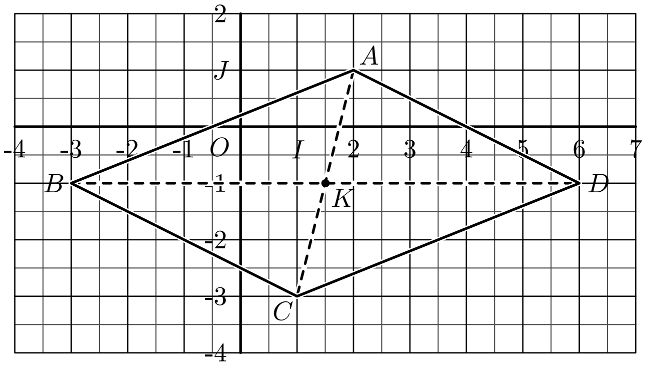
K étant le milieu du segment $[BD]$, on a :

$$K(x_K\,;y_K)=\Big(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\Big)$$

On en éduit les deux équations suivantes :

$x_K=\dfrac{x_B+x_D}{2}$	$y_K=\dfrac{y_B+y_D}{2}$
$\dfrac{3}{2}=\dfrac{(-3)+x_D}{2}$	$-1=\dfrac{(-1)+y_D}{2}$
$3=-3+x_D$	$-2=-1+y_d$
$x_D=6$	$-1=1$

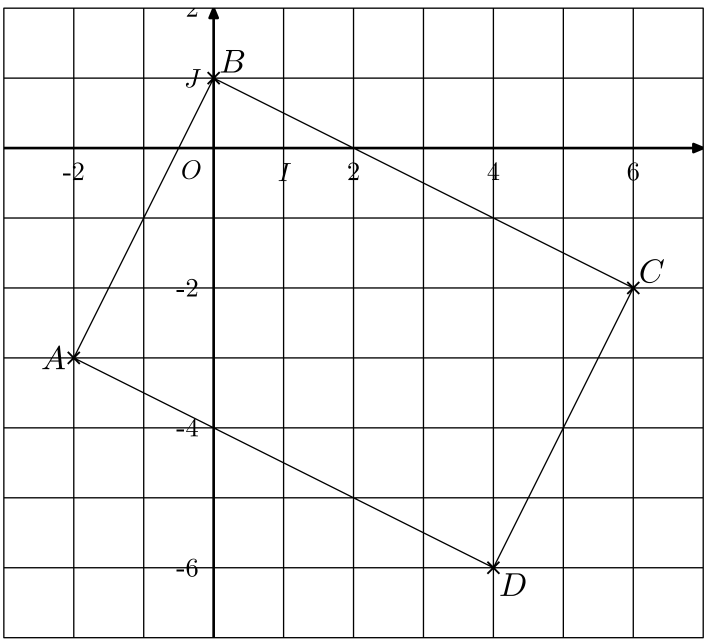
Le point D a pour coordonnée $(6\,;-1)$.



Correction 4

Une video est accessible

1. Voici la représentation du quadrilatère :



2. a. On a les longueurs suivantes :

- $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$
  $= \sqrt{\left[0-(-2)\right]^2 + \left[1-(-3)\right]^2}$
  $= \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$
  La longueur AB admet pour expression simplifiée :
  $AB = \sqrt{20} = \sqrt{2^2{\times}5} = 2\sqrt{5}$
- $AD = \sqrt{\left(x_D - x_A\right)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2}$
  $= \sqrt{\left[4-(-2)\right]^2 + \left[-6-(-3)\right]^2}$
  $= \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$
- $BC = \sqrt{\left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2}$
  $= \sqrt{\left(6-0\right)^2 + \left(-2-1\right)^2}$
  $= \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$
  La longueur BC admet l'expression simplifiée :
  $BC = \sqrt{9{\times}5} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
- $CD = \sqrt{\left(x_D - x_C\right)^2 + \left(y_D - y_C\right)^2}$
  $= \sqrt{\left(4-6\right)^2 + \left[-6-(-2)\right]^2}$
  $= \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$
  La distance CD admet l'expression simplifiée :
  $CD = \sqrt{20} = \sqrt{2^2{\times}5} = 2\sqrt{5}$

b. Le quadrilatère $ABCD$ a ses côtés opposés de même longueur : $ABCD$ est un parallélogramme.

3. Déterminons la mesure de la longueur de la diagonale $[AC]$:

$$AC = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left[6-(-2)\right]^2 + \left[-2-(-3)\right]^2}$$
$$= \sqrt{8^2+1^2} = \sqrt{65}$$

On a : $AC^2 = 65$; $AB^2+BC^2 = 20+45 = 65$

On remarque l'égalité suivante des carrés de longueurs :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Correction 5

Soit x un nombre réel quelconque. Le point M étant un point de la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit que ses coordonnées sont :
$M\big(x\,;f(x)\big) = \left(x\,;x^2\right)$

- La distance FM a pour mesure :

$$FM = \sqrt{\left(x_M - x_F\right)^2 + \left(y_M - y_F\right)^2} = \sqrt{\left(x-0\right)^2 + \left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + \left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(x^2\right)^2 - 2{\times}\frac{1}{4}{\cdot}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + \left(x^2\right)^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(x^2\right)^2 + \frac{1}{2}{\cdot}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(x^2\right)^2 + 2{\times}\frac{1}{4}{\cdot}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2} = \left|x^2+\frac{1}{4}\right|$$

  Le nombre $x^2+\dfrac{1}{4}$ étant strictement positif :

$$= x^2+\frac{1}{4}$$

- La droite (Δ) a pour équation $y=\dfrac{1}{4}$. On en déduit qu'elle est parallèle à l'axe des abscisses.
  P étant le projeté orthogonal du point M sur la droite Δ, on en déduit que la droite (MP) est parallèle à l'axe des ordonnées.
  On en déduit que la valeur de la distance MP :
  $MP = \left|y_M - y_P\right| = \left|x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \left|x^2+\frac{1}{4}\right|$
  $= x^2+\frac{1}{4}$

On en déduit que tout point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ est équidistant du point F et de la droite (Δ).

