T T2 DM n°6 : Fonctions rationnelles – Correction Mars 2021

Ex n° 25 :

$f(x)=-x^3+9x^2-24x+20$ avec $x\in[0;6]$

conjectures :

- f est décroissante sur $[0;2]$ et sur $[4;6]$
- f est croissante sur $[2;4]$
- f admet un maximum local en $x=4$
- f admet un minimum local en $x=2$

dérivée de f : $f'(x)=-3x^2+9\times 2x-24\times 1+0=-3x^2+9x-24$

racines de f' : $-3x^2+18x-24=0$ donc $\Delta=18^2-4\times(-3)\times(-24)=36$;
$x_1=\dfrac{-18-\sqrt{36}}{-6}=4$ et $x_2=\dfrac{-18+\sqrt{36}}{-6}=2$

le signe de f' est donné par :

x	0		2		4		6
$-3x^2+9x-24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

on en déduit le tableau de variations de f :

x	0		2		4		6
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	20	↘	0	↗	4	↘	-16

Ex n° 73 :

- production : $x\in[0{,}3;6]$ en tonnes de farine bio
- coût moyen : $f(x)=4x+\dfrac{9}{x}$ en centaines d'euros
- prix de vente : $p=20$ centaines d'euros la tonne

dérivée de f : $f'(x)=4-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{4x^2-9}{x^2}$

racines de f' : $4x^2-9=0$ donc $\Delta=0^2-4\times 4\times(-9)=144$
$x_1=\dfrac{0-\sqrt{144}}{8}=-1{,}5$ et $x_2=\dfrac{0+\sqrt{144}}{8}=1{,}5$

le signe de f' est donné par :

x	0,3		1,5		6
$4x^2-9$		$-$	0	0	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

on en déduit le tableau de variations de f :

x	0,3		1,5		6
signe de f'		$-$	0	$+$	
f	31,2	↘	12	↗	25,5

le coût moyen est minimal pour une production de $1{,}5\,tonne$ de farine bio
ce coût moyen minimal est de $C_M(1{,}5)=1200\,€$

le coût total de production est :

$C_T(x)=C_M(x)\times x=f(x)\times x=(4x+\dfrac{9}{x})\times x=4x^2+9$

la recette est : $R(x)=p\times x=20x$

le bénéfice est : $B(x)=R(x)-C_T(x)=20x-(4x^2+9)=-4x^2+20x-9$

points morts de l'entreprise : $B(x)=0$ donc $-4x^2+20x-9=0$
donc $\Delta=20^2-4\times(-4)\times(-9)=256$;
$x_1=\dfrac{-20-\sqrt{256}}{-8}=4{,}5$ et $x_2=\dfrac{-20+\sqrt{256}}{-8}=-0{,}5$

étude du bénéfice : $B'(x)=-8x+20$

racines de B' : $-8x+20=0$ donc $x=\dfrac{20}{8}=2{,}5$

la production optimale est de $x_0=2{,}5$ tonnes de farine
donc $B(x_0)=B(4{,}5)=16$ soit $B_{max}=1600\,€$

Formules TABLEUR :

B3=A3*20 ; C3=4*A3+9/A3 ; D3=C3*A3 ; E3=B3-D3