Correction 1

1. Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$v_0 = u_0 - 255 = 150 - 225 = -75$

Le terme de rang $n{+}1$ de la suite (v_n) a pour expression :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 225 = \big(0{,}8\cdot u_n + 45\big) - 225 = 0{,}8\cdot u_n - 180$$
$$= 0{,}8\cdot\Big(u_n - \frac{180}{0{,}8}\Big) = 0{,}8\cdot\big(u_n - 225\big) = 0{,}8\cdot v_n$$

Cette dernière relation montre que la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme -75 et de raison $0{,}8$.

2. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme -75 et de raison $0{,}8$ a ses termes de rang n, pour n un entier naturel, qui admettent pour expression :
$v_n = -75\times 0{,}8^n$

De la définition des termes de la suite (v_n), on a la relation :
$$v_n = u_n - 225$$
$$-75\times 0{,}8^n = u_n - 225$$
$$u_n = -75\times 0{,}8^n + 225$$

Correction 2

1. Par définition des termes de la suite (v_n), on a la relation :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,900 = \big(1{,}04\cdot u_n - 156\big) - 3\,900$$
$$= 1{,}04\cdot u_n - 4\,056 = 1{,}04\cdot\Big(u_n - \frac{4\,056}{1{,}04}\Big)$$
$$= 1{,}04\cdot\big(u_n - 3\,900\big) = 1{,}04\cdot v_n$$
Cette relation permet de montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1{,}04$.

Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$v_0 = u_0 - 3\,900 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600$

2. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $23\,600$ et de raison $1{,}04$. Son terme de rang n admet pour expression :
$v_n = 23\,600\times 1{,}04^n$

Par définition des termes de la suite (v_n), on a la relation :
$$v_n = u_n - 3\,900$$
$$23\,600\times 1{,}04^n = u_n - 3\,900$$
$$u_n = 23\,600\times 1{,}04^n + 3\,900$$

Correction 3

1.
- D'aprés l'énoncé, en 2005, la zone industrielle a émis 41 millions de tonnes de CO_2. On en déduit la valeur du premier terme de la suite (u_n) :
$u_0 = 41$
- Une réduction de $2\,\%$ est associée à un coefficient multiplicateur de $0{,}98$. Sachant que 200 tonnes supplémentaires de CO_2 sont produites chaque année par les nouvelles installations, on en déduit la valeur u_1 associée aux GES produits en 2016 :
$$u_1 = 0{,}98\times u_0 + 0{,}2 = 0{,}98\times 41 + 0{,}2 = 40{,}18 + 0{,}2 = 40{,}38$$

2. De manière générale, les émissions produites une année seront réduites de $2\,\%$ et s'expriment par $0{,}98\cdot u_n$. Puis s'ajoutent les émissions des nouvelles entreprises. On obtient pour l'année suivante :
$u_{n+1} = 0{,}98\cdot u_n + 0{,}2$

3. a. Par définition des termes de la suite (v_n), le terme de rang $n{+}1$ a pour expression :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10$$
$$v_{n+1} = \big(0{,}98\cdot u_n + 0{,}2\big) - 10$$
$$v_{n+1} = 0{,}98\cdot u_n - 9{,}8$$
$$v_{n+1} = 0{,}98\cdot\Big(u_n - \frac{9{,}8}{0{,}98}\Big)$$
$$v_{n+1} = 0{,}98\cdot\big(u_n - 10\big)$$
$$v_{n+1} = 0{,}98\cdot v_n$$
On vient d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont la raison est $0{,}98$.
Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$$v_0 = u_0 - 10$$
$$v_0 = 41 - 10$$
$$v_0 = 31$$

b. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 31 et de raison $0{,}98$. Son terme de rang n admet pour expression :
$v_n = 31\times 0{,}98^n$

c. Par définition des termes de la suite (v_n), on a la relation :
$$v_n = u_n - 10$$
$$31\times 0{,}98^n = u_n - 10$$
$$u_n = 31\times 0{,}98^n + 10$$

Correction 4

1. Une réduction de $25\,\%$ est associée au coefficient multiplicateur :
$$k = 1 + \frac{-25}{100} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$
Ainsi, le nombre de voiture de l'année précédente subit cette réduction et représentera $0{,}75\cdot u_n$. Avec le nombre de voitures achetées neuves, on en déduit que l'année suivante, le nombre de voitures dont il dispose est :
$u_{n+1} = 0{,}75\cdot u_n + 3000$

2. a. Par définition des termes de la suite (v_n), le terme de rang $n{+}1$ est défini par :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,000$

Par définition des termes de la suite (u_n) :
$$v_{n+1} = \big(0{,}75\cdot u_n + 3\,000\big) - 12\,000$$
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot u_n - 8\,000$$
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot\Big(u_n - \frac{9\,000}{0{,}75}\Big)$$
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot\big(u_n - 12\,000\big)$$
Par définition des termes de la suite (v_n) :
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot v_n$$
Cette relation de récurrence permet d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}75$.
Cette suite a pour premier terme :
$v_0 = u_0 - 12\,000 = 10\,000 - 12\,000 = -2\,000$

b. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $-2\,000$ et de raison $0{,}75$. Ainsi, son terme de rang n admet pour expression explicite :
$v_n = -2\,000\times 0{,}75^n$

 BY-NC

La raison de la suite (v_n) vérifie l'encadrement $0 \leqslant 0{,}75 < 1$. Ainsi, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}75^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} -2\,000\times 0{,}75^n = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$$

c. De la définition de la suite (u_n), nous avons l'ídentité suivante :

$$v_n = u_n - 12\,000$$
$$v_n + 12\,000 = u_n$$
$$u_n = -2\,000\times 0{,}75^n + 12\,000$$

d. De l'encadrement $0 < 0{,}75 < 1$, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}75^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} -2000\times 0{,}75^n = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} -2000\times 0{,}75^n + 12\,000 = 12\,000$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 12\,000$$

On en déduit que le nombre de voitures dont disposera le loueur est de $12\,000$ voitures au bout d'un grand nombre d'années.

Correction 5

1. Chaque mois, $10\,\%$ des clients se désabonnent. Ceci correspond à une évolution de taux $-10\,\%$ dont le coefficient multiplicateur associé est :

$$1 + \frac{-10}{100} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Ainsi, en notant v_n le nombre de clients pour un mois, cette évolution se traduira le mois prochain par $0{,}9\times v_n$. De plus, chaque mois, $2\,500$ nouveaux abonnés sont enregistrés. Ainsi, le total v_{n+1} de clients enregistrés le mois suivant s'obtient par la relation :

$$v_{n+1} = 0{,}9\cdot v_n + 2\,500$$

2. a. De la définition des termes de la suite (w_n), le terme de rang $n+1$ admet pour expression :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 25\,000$$

Par définition de la suite (v_n) :

$$w_{n+1} = \big(0{,}9\cdot u_n + 2\,500\big) - 25\,000$$
$$w_{n+1} = 0{,}9\cdot u_n - 22\,500$$
$$w_{n+1} = 0{,}9\cdot\Big(u_n - \frac{22\,500}{0{,}9}\Big)$$
$$w_{n+1} = 0{,}9\cdot\big(u_n - 25\,000\big)$$
$$w_{n+1} = 0{,}9\cdot w_n$$

Cette relation permet d'affirmer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0{,}9$.

Le premier terme a pour valeur :

$$w_0 = v_0 - 25\,000 = 15\,000 - 25\,000 = -10\,000$$

b. La suite (w_n) est la suite géométrique de premier terme $-10\,000$ et de raison $0{,}9$. Ainsi, ses termes admettent pour expression explicite :

$$w_n = -10\,000\times 0{,}9^n$$

De la définition des termes de la suite (v_n), on en déduit la relation :

$$w_n = v_n - 25\,000$$
$$v_n = w_n + 25\,000$$
$$v_n = -10\,000\times 0{,}9^n + 25\,000$$

c. De la comparaison $0 \leqslant 0{,}9 < 1$, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}9^n = 0$$
$$\lim_{n\mapsto\infty} -10\,000\times 0{,}9^n = 0$$
$$\lim_{n\mapsto\infty} 25\,000 - 10\,000\times 0{,}9^n = 25\,000$$
$$\lim_{n\mapsto\infty} v_n = 25\,000$$

Ainsi, le nombre de clients se stabilisera au cours des années vers $25\,000$.

 CC BY-NC