Ex 1 : 12 pts

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an. Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.
On modélise la nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000+n)$ par la suite (u_n).

1. a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Déterminer la nature de la suite (u_n) et montrer que, pour tout entier n, $u_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.
2. a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante.
   b) Expliquer pourquoi est-on certain que la production annuelle de cette machine deviendra inférieure à 90 000 jouets au bout d'un certain temps.
3. On considère l'algorithme ci-contre.

   n est un entier. S et U sont des réels.

   ```
   n ← 0
   U ← 120 000
   Tant que U ⩾ S Faire
       n ← n + 1
       U ← U × 0,98
   Fin Tant que
   ```

   a) Pour la valeur $S = 110\,000$, recopier et compléter le tableau suivant (les résultats seront arrondis à l'unité) :

n	0	1	2	....
U	120 000	117 600		...

   b) En déduire la valeur de n obtenue quand $S = 110\,000$.
   c) Interpréter, dans le contexte, le résultat obtenu.
4. L'industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an. Déterminer en quelle année il devra le faire.
5. **<u>Bonus</u> :** Proposer un algorithme qui permet de calculer le nombre total de jouets fabriqués de 2000 à 2017 (inclus).

Ex 2 : 8 pts

L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75% des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n, le nombre d'abonnés pour l'année $2018+n$. Il y a 500 abonnés pour l'année 2018 : $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2. Arrondir à l'entier.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 300$.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1200$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Calculer v_0.
   b) Exprimer v_n en fonction de n $(n \geqslant 0)$.
   c) En déduire alors que pour tout entier naturel n, $u_n = -700 \times 0{,}75^n + 1200$.
4. Prévoir le nombre d'abonnés en 2028.
5. Le directeur de l'opéra peut-il espérer tripler le nombre d'abonnés ? Justifier.
   On admet que la suite (u_n) est croissante.