Ex 1 : 12 pts

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an. Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.

On modélise la nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par la suite (u_n).

1. a) $*$ $u_0 = 120\,000$

   $*$ $u_1 = 120\,000 \times 0{,}98 = 117\,600$ car diminuer de 2% revient à multiplier par $0{,}98$

   $*$ $u_2 = 117\,600 \times 0{,}98 = 115\,248$

   b) Diminuer de 2% revient à multiplier par $0{,}98$ donc $u_{n+1} = 0{,}98 \times u_n$, pour tout entier n.

   c) Puisque $u_{n+1} = 0{,}98 u_n$, pour tout entier n, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de premier terme $u_0 = 120\,000$.

   On a $u_n = u_0 \times q^n$, pour tout entier n.
   Ainsi, $u_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$, pour tout entier n.

2. a) $0 < 0{,}98 < 1$ et $120\,000 > 0$ donc la suite géométrique (u_n) est décroissante.

   b) Comme $0 < 0{,}98 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}98^n = 0$. Donc, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 120\,000 \times 0{,}98^n = 0$.
   Ainsi, on est certain que la production annuelle de cette machine deviendra inférieure à $90\,000$ jouets au bout d'un certain temps (puisque cette production sera « nulle au bout d'un temps infini »).

3. On considère l'algorithme ci-dessous :
   n est un entier. S et U sont des réels.

   $n \leftarrow 0$
   $U \leftarrow 120\,000$
   Tant que $U \geqslant S$ Faire
   $\quad n \leftarrow n + 1$
   $\quad U \leftarrow U \times 0{,}98$
   Fin Tant que

   a) Pour la valeur $S = 110\,000$ saisie, on obtient le tableau suivant (les résultats sont arrondis à l'unité) :

n	0	1	2	3	4	5
U	120 000	117 600	115 248	112 943	110 684	108 470

   l'algorithme s'arrête car $U < 110\,000$

   b) Quand la valeur de S saisie est $110\,000$, la valeur de n est égale à 5.

   c) Le résultat précédent signifie que la machine VP1000 produira moins de 110 000 jouets en $2000 + 5 = 2005$.

4. L'industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de $90\,000$ jouets par an.
   A la calculatrice,
   $u_{14} \approx 90\,437$
   $u_{15} \approx 88\,628$
   Ainsi, cette machine produira moins de 90 000 jouets en 2015. L'industriel devra donc la changer à la fin de l'année 2015 (ou au début de l'année 2016).

5. <u>Bonus</u> : L'algorithme ci-dessous permet de calculer le nombre total de jouets fabriqués de 2000 à 2017 (inclus) :
   n est un entier et S est un réel.

   $S \leftarrow 0$
   Pour $n = 0$ jusqu'à 17 Faire
   $\quad S \leftarrow S + 120\,000 \times 0{,}98^n$
   Fin Pour
   Afficher le nombre S

Ex 2 : 8 pts

L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75% des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n, le nombre d'abonnés pour l'année $2018+n$. Il y a 500 abonnés pour l'année 2018 : $u_0 = 500$.

1. * $u_1 = 0{,}75 \times 500 + 300 = 675$
   Le nombre d'abonnés sera de 675 en 2019.
   * $u_2 = 0{,}75 \times 675 + 300 \approx 806$
   Le nombre d'abonnés sera environ de 806 en 2020.
2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 300$.
   75% des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante. On multilple donc le nombre d'abonnés de l'année en cours par 0,75, auquel on ajoute les 300 nouveaux abonnés, pour obtenir le nombre d'abonnés de l'année suivante.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1200$.
   a) Soit $n \geqslant 0$,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1200 \\ &= 0{,}75u_n + 300 - 1200 \\ &= 0{,}75u_n - 900 \\ &= 0{,}75\left(u_n - \frac{900}{0{,}75}\right) \\ &= 0{,}75\,(u_n - 1200) \\ &= 0{,}75v_n \quad \text{car } v_n = u_n - 1200 \end{aligned}$$
   Ainsi, $v_{n+1} = 0{,}75v_n, \quad \forall n \geqslant 0$.
   On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1200 = 500 - 1200 = -700$.
   b) De la question précédente, on en déduit que $v_n = v_0 \times q^n$, soit $\boxed{v_n = -700 \times 0{,}75^n}$, $\forall n \geqslant 0$.
   c) On a $\forall n \geqslant 0, v_n = u_n - 1200 \iff -700 \times 0{,}75^n = u_n - 1200 \iff u_n = -700 \times 0{,}75^n + 1200$
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = -700 \times 0{,}75^n + 1200}$.
4. Nombre d'abonnés en 2028 : $u_{10} = -700 \times 0{,}75^{10} + 1200 \approx 1161$.
   On peut estimer à $1\,161$, le nombre d'abonnés en 2028.
5. $3 \times 500 = 1500$.
   Comme $0 < 0{,}75 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -700 \times 0 + 1200 = 1200$.
   Puisque la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1200$, on peut dire que le nombre d'abonnés va augmenter puis stagner à $1\,200$ abonnés au bout d'un grand nombre d'années. Le directeur de l'opéra ne peut pas espérer tripler le nombre d'abonnés.