Correction 1

a. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 5^n = +\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3\times 5^n = +\infty$$

b. On a les deux limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{7}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{2}{7}\Big)^n = 0$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} n - \Big(\frac{2}{7}\Big)^n = +\infty$$

c. On a les deux limites suivantes :

- Puisque $0\leqslant\frac{1}{3}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = 0$
- Puisque $\frac{3}{2}>1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{3}{2}\Big)^n = +\infty$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n - \Big(\frac{3}{2}\Big)^n = -\infty$$

d. On a la transformation algébrique suivante :
$$8^n - 3^n = 8^n\cdot\Big(1-\frac{3^n}{8^n}\Big) = 8^n\cdot\Big[1-\Big(\frac{3}{8}\Big)^n\Big]$$
On a les deux limites suivantes :

- Puisque $8>1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} 8^n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{3}{8}<1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} 1-\Big(\frac{3}{8}\Big)^n = 1$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} 8^n - 3^n = \lim_{n\mapsto+\infty} 8^n\cdot\Big[1-\Big(\frac{3}{8}\Big)^n\Big] = +\infty$$

e. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n} = \frac{5^n\cdot\Big(1-\dfrac{2^n}{5^n}\Big)}{3^n\cdot\Big(1+\dfrac{2^n}{3^n}\Big)} = \frac{5^n}{3^n}\cdot\frac{1-\dfrac{2^n}{5^n}}{1+\dfrac{2^n}{3^n}}$$
$$= \Big(\frac{5}{3}\Big)^n\cdot\frac{1-\Big(\dfrac{2}{5}\Big)^n}{1+\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n}$$
On a les deux limites suivantes :

- Puisque $\frac{5}{3}>1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{5}{3}\Big)^n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{5}<1$ et $0\leqslant\frac{2}{3}<1$, on a :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{2}{5}\Big)^n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0$$
On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\Big(\dfrac{2}{5}\Big)^n}{1+\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n} = 1$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n} = \lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{5}{3}\Big)^n\cdot\frac{1-\Big(\dfrac{2}{5}\Big)^n}{1+\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n} = +\infty$$

f. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\Big(\frac{31}{7}\Big)^n\cdot\Big(\frac{2}{8}\Big)^n = \Big(\frac{31}{7}\times\frac{2}{8}\Big)^n = \Big(\frac{62}{56}\Big)^n$$
De la comparaison $\frac{62}{56}>1$, on en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{31}{7}\Big)^n\cdot\Big(\frac{2}{8}\Big)^n = \lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{62}{56}\Big)^n = +\infty$$

Correction 2

a. Pour tout entier naturel n non-nul, on a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{2n^2-3n+1}{n+1} = \frac{n^2\cdot\Big(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\Big)}{n\cdot\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)} = \frac{n\cdot\Big(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\Big)}{1+\dfrac{1}{n}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} n\cdot\Big(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n\cdot\Big(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\Big)}{1+\dfrac{1}{n}} = +\infty$$

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{n-3}{n^2+1} = \frac{n\cdot\Big(1-\dfrac{3}{n}\Big)}{n^2\cdot\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)} = \frac{1-\dfrac{3}{n}}{n\cdot\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} 1-\frac{3}{n} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} n\cdot\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big) = +\infty$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}}{n\cdot\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)} = 0$$

c. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :
$$u_n = \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}\cdot\Big(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)}{\sqrt{n}\cdot\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)} = \frac{2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} 2+\frac{1}{\sqrt{n}} = 2 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{1} = 2$$

d. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a la transformation algébrique suivante :
$$1+n-2n^2+3n^3 = n^3\cdot\Big(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3\Big)$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3 = 3$$
On en déduit la limite du produit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} n^3\cdot\Big(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3\Big) = +\infty$$

Correction 3

1. Calculons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1}-6 = \frac{1}{3}\cdot u_n+4-6 = \frac{1}{3}\cdot u_n-2$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(u_n-6) = \frac{1}{3}\cdot v_n$$

Le rapport entre deux termes consécutifs étant constant, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=5-6=-1$.

2. Une suite géométrique de premier terme -1 et de raison $\dfrac{1}{3}$ a son terme de rang n qui admet pour expression:
$$v_n = -1\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^n$$

3. On a:
$$v_n = u_n-6$$
D'après la question 2.
$$-\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = u_n-6$$
$$u_n = 6-\Big(\frac{1}{3}\Big)^n$$

4. On a l'encadrement: $0\leqslant\dfrac{1}{3}<1$

On en déduit la limite: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = 0$

On en déduit la valeur de la limite de la suite (u_n) :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 6-0 = 6$$

Correction 4

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 1$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = 1$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+} f(x) = +\infty$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} g(x) = \frac{1}{2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+} g(x) = +\infty$

Correction 5

1. La racine carrée d'un nombre n'est définie que si ce nombre est positif ou nul; cherchons les valeurs pour lesquelles, le polynôme se trouvant sous le radical est positif ou nul:

Ce polynôme admet pour discriminant:
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-2)^2-4\times1\times3 = 4-12 = -8$$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, ce polynôme admet pour signe sur $\mathbb{R}$ le coefficient du terme du second degré:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
x^2-2x+3	$+$

La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction g est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où:
$$u(x) = x^2-2x+3 \quad ; \quad u'(x) = 2x-2$$

La formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

On a les deux valeurs suivantes:

- $$g\Big(\frac{3}{2}\Big) = \sqrt{\Big(\frac{3}{2}\Big)^2-2\times\frac{3}{2}+3}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{6}{2}+3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

- $$g'\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{\frac{3}{2}-1}{\sqrt{\Big(\frac{3}{2}\Big)^2-2\times\frac{3}{2}+3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ la tangente d'équations:
$$y = g'\Big(\frac{3}{2}\Big)\cdot\Big(x-\frac{3}{2}\Big)+g\Big(\frac{3}{2}\Big)$$
$$y = \frac{1}{3}\cdot\Big(x-\frac{3}{2}\Big)+\frac{3}{2}$$
$$y = \frac{1}{3}\cdot x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$$
$$y = \frac{1}{3}\cdot x+1$$

Correction 6

1. La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par:
$$u(x) = x^2+2x+5 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x^2+1}$$
qui admettent pour dérivée:
$$u(x) = 2\cdot x+2 \quad ; \quad v'(x) = \frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée f' :
$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(2\cdot x+2)\cdot\sqrt{x^2+1}-(x^2+2x+5)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\big(\sqrt{x^2+1}\big)^2}$$
$$= \frac{\dfrac{(2\cdot x+2)\cdot(x^2+1)-(x^2+2x+5)\cdot x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$
$$= \frac{(2\cdot x+2)\cdot(x^2+1)-(x^2+2x+5)\cdot x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2x^3+2x+2x^2+2-x^3-2x^2-5x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^3-3x+2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

Identifions cette expression de f' à l'expression proposée dans l'énoncé:
$$\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3+x^2-2x-x^2-x+2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = f'(x)$$

2. Etudions le polynôme du second degré x^2+2x+5 qui admet pour discriminant:
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 1^2-4\times1\times(-2) = 1+8 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1-3}{2\times1} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1+3}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$$

Le coefficient du terme de second degré étant positif, on connait le signe de ce polynôme.

Le dénominateur du quotient définissant f' est toujours strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

La fonction f admet les deux images suivantes :

- $f(-2) = \dfrac{(-2)^2+2\times(-2)+5}{\sqrt{(-2)^2+1}} = \dfrac{4+(-4)+5}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
- $f(1) = \dfrac{1^2+2\times1+5}{\sqrt{1^2+1}} = \dfrac{1+2+5}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4{\cdot}\sqrt{2}$

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	-∞	-2	1	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\sqrt{5}$ ↗	$4\sqrt{2}$ ↗	$+\infty$

Correction 7

1. En notant u la fonction définie par :
$u(x) = x^2 - x - 2 \quad ; \quad$ où $u'(x) = 2x-1$

D'après la formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction, on en déduit l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1}{8}\times3{\cdot}u'(x){\cdot}\big[u(x)\big]^2 = \frac{1}{8}\times3{\cdot}(2x-1){\cdot}\big(x^2-x-2\big)^2$$
$$= \frac{3}{8}{\cdot}(2x-1){\cdot}\big(x^2-x-2\big)^2$$

Un carrée étant toujours positif ou nul, déterminons les valeurs pour lesquelles s'annulent ce polynôme du second degré. Il admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 1+8 = 9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)-3}{2\times1} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)+3}{2\times1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\frac{3}{8}{\cdot}(2x-1)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x) = \frac{1}{8}{\cdot}\big(x^2-x-2\big)^3 = \frac{1}{8}{\cdot}\Big[x^2{\cdot}\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)\Big]^3$$
$$= \frac{1}{8}{\cdot}x^6{\cdot}\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)^3$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{8}{\cdot}x^6 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)^3 = 1$$

On en déduit la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = +\infty$

De même, on montre que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	-∞	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-1,4$ ↗	0 ↗	$+\infty$

2. On a les deux valeurs :

- $f(1) = \dfrac{1}{8}{\cdot}\big(x^2-x-2\big)^3 = \dfrac{1}{8}\times(-2)^3 = \dfrac{1}{8}\times(-8) = -1$
- $f'(1) = \dfrac{3}{8}{\cdot}(2\times1-1){\cdot}\big(1^2-1-2\big)^2 = \dfrac{3}{8}\times1\times(-2)^2$
$= \dfrac{3}{8}\times4 = \dfrac{3}{2}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite :

$y = f'(1){\cdot}\big(x-1\big) + f(1)$

$y = \dfrac{3}{2}{\cdot}(x-1) - 1$

$y = \dfrac{3}{2}{\cdot}x - \dfrac{3}{2} - 1$

$y = \dfrac{3}{2}{\cdot}x - \dfrac{5}{2}$

Correction 8

1. Une racine carrée n'est définie que si l'expression située sous son radical est positive ou nulle. Ainsi, pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, il est nécessaire de déterminer le signe du polynôme $-2x^2 - x + 6$

Ce polynôme admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times(-2)\times 6 = 1 + 48 = 49$
On a la simplification suivante :
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-7}{2\times(-2)} = \frac{1-7}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+7}{2\times(-2)} = \frac{1+7}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 - x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que la fonction f est définie sur l'intervalle $\left[-2\,;\frac{3}{2}\right]$.

2. L'expression de la fonction f est définie par la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :
$u(x) = -2x^2 - x + 6 \quad ; \quad u'(x) = -4x - 1$

La formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}} = \frac{-4x-1}{2\cdot\sqrt{-2x^2-x+6}}$$

