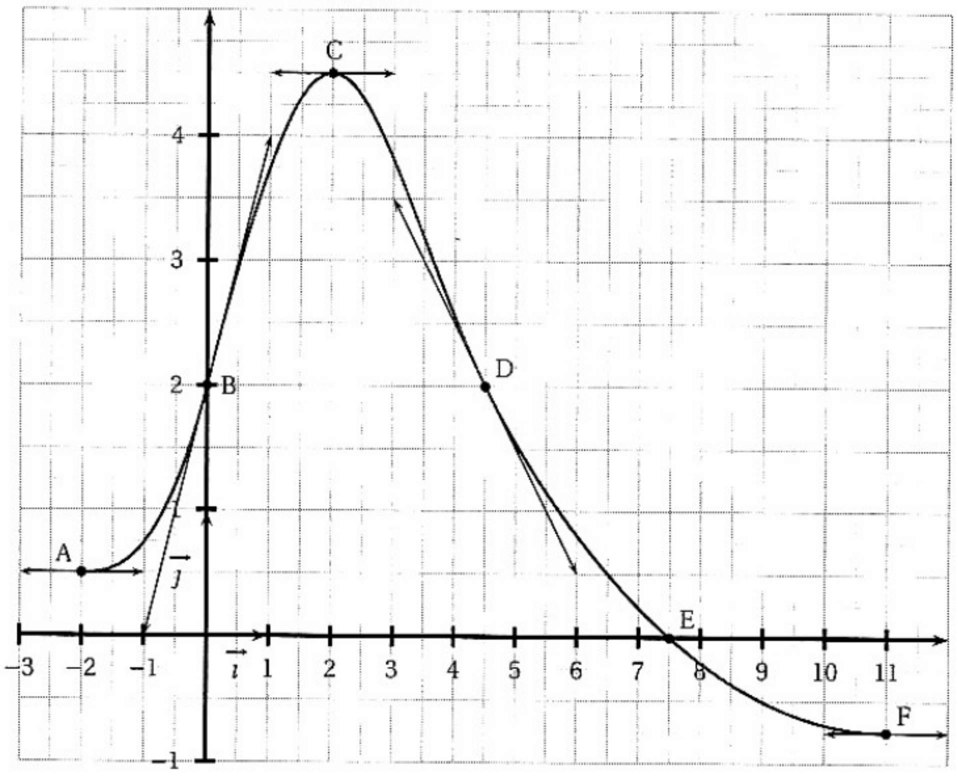
Ex 1 : (*) - 4 pts

On donne la fonction f définie par le graphique C_f ci-dessous :



On lit graphiquement les tangentes suivantes : $(T_A): y=0{,}5$; $(T_B): y=2x+2$; $(T_C): y=5$; $(T_D): y=-x+6{,}5$; $(T_F): y=-0{,}75$

Le tableau de variations de f est :

x	-2		2		11
signe de f'	0	+	0	−	0
f	1	↗	5	↘	-0,75

le tableau de signes de f est :

x	-2		7,5		11
$f(x)$		+	0	−	

le tableau de convexité de f est :

x	-2		0		4,5		11
signe de f''		+	0	−	0	+	
f		Convexe	|	concave	|	convexe	

On déduit que f possède :

- un minimum local en $x=-2$
- un maximum local et global en $x=2$
- un minimum local et global en $x=11$

On déduit aussi que la courbe C_f possède 2 points d'inflexions en $B(0;2)$ et $D(4{,}5;2)$

Ex 2 : (**) - 6 pts

Soit la fonction f définie sur $[-3;4]$ par : $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-5$

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x^2-x-2)=-6(x+1)(x-2)$

les racines de f' sont donc $x=-1$ et $x=2$

on en déduit le tableau de variations de f :

x	-3		-1		2		4
signe de f'		−	0	+	0	−	
f	40	↘	-12	↗	15	↘	-37

D'après le tableau ci-dessus :

- f est continue et monotone sur l'intervalle $[0;1]$
- $f(0)=-5<5$ et $f(1)=8>5$

ainsi en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=5$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0;1]$

avec une calculatrice on obtient : $\alpha \simeq 0{,}762$

on a $f''(x)=-12x+6$; la racine de f'' est donc $x_0=0{,}5$
on en déduit le tableau de convexité de f :

x	-3		0,5		4
signe de f''		+	0	−	
f		Convexe	|	concave	

Ainsi la courbe C_f admet un point d'inflexion en $A(0{,}5\ ;1{,}5)$

Ex 3 : (***) - 5 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+4}$

on observe que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x^2-2x+4\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}$

la dérivée est $f'(x)=\dfrac{(3x^2)(x^2-2x+4)-x^3(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2}$

soit $f'(x)=\dfrac{3x^4-6x^3+12x^2-2x^4+2x^3}{(x^2-2x+4)^2}=\dfrac{x^4-4x^3+12x^2}{(x^2-2x+4)^2}$

en factorisant le numérateur par x^2 on obtient $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-4x+12)}{(x^2-2x+4)^2}$

le tableau de signes de f' est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	
$x^2-4x+12$		+		+	
$f(x)$		+	0	+	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		+	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+4}=\dfrac{x^3}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\dfrac{x}{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=1-0+0=1$

donc (par quotient) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=-\infty$

d'où on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

On <u>admet</u> que $f''(x)=\dfrac{-48x^2+96x}{(x^2-2x+4)^3}$

le signe de $-48x^2+96x$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-48x^2+96x$		−	0	+	0	−	

On en déduit le le tableau de convexité de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de f''		−	0	+	0	−	
f		Concave	|	convexe	|	concave	

La courbe C_f admet donc 2 points d'inflexions en $A(0\,;0)$ et $B(2\,;2)$

BONUS : $f'(x)=\dfrac{x^4-4x^3+12x^2}{(x^2-2x+4)^2}$ donc on obtient la dérivée seconde

$$f''(x)=\frac{(4x^3-12x^2+24x)(x^2-2x+4)^2-(x^4-4x^3+12x^2)(4x-4)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)^4}$$

donc $f''(x)=\dfrac{(4x^3-12x^2+24x)(x^2-2x+4)-(x^4-4x^3+12x^2)(4x-4)}{(x^2-2x+4)^3}$

$$=\frac{(4x^5-20x^4+64x^3-96x^2+96x)-(4x^5-20x^4+64x^3-48x^2)}{(x^2-2x+4)^3}$$

On obtient bien : $f''(x)=\dfrac{-48x^2+96x}{(x^2-2x+4)^3}$