Suites arithmético-géométriques: $u_{n+1} = au_n + b$

Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique lorsque ses termes sont liés par une relation de la forme u_{n+1} = au_n + b où a et b sont deux réels, $a \neq$ 0.

Lorsque $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique.

Lorsque $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique.

Dès que l'on travaille sur des suites arithmético-géométriques la **méthode** est toujours la même :

Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = au_n + b$ et u_0 donné :

- Il faut **trouver le nombre c** telle que la suite **$v_n = u_n - c$ soit géométrique.**

  En général c est la solution de l'équation $ax + b = x$

- On détermine **la raison q et le premier terme**.

- On exprime **v_n en fonction de n** : $v_n = v_0 \times q^n$, puis on en déduit **u_n en fonction de n** :

$u_n = v_0 \times q^n + c$

- On en déduit ainsi **la limite de u_n lorsque n tend vers +∞ :**

Si 0< q <1 la limite est c

Si q > 1 la limite est infinie

1) Exemple 1: cas où la limite est finie :

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$

1. A l'aide d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n).Qu'elle conjecture peut-on faire concernant la limite de (u_n) ?

2. On note α la limite supposée de la suite (u_n) et on considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$

a) Calculer la valeur exacte des trois premiers termes de la suite (v_n).

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Réponse:

1. A l'aide d'un tableur nous obtenons les résultats suivants :

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
1	1,5	1,75	1,875	1,9375	1,9688	1,984375	1,9922	1,99609	1,99805	1,99902	1,999512	1,99976	1,99988	1,99994	1,99996

Il semblerait que la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞ soit 2.

2.a.

$u_0 = 1$ donc $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$

$u_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ donc $v_1 = u_1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$ donc $v_2 = u_2 - 2 = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}$

La suite (v_n) semble être géométrique. Nous allons le prouver dans la question suivante :

b. pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2} u_n - 1$

Donc pour tout entier naturel n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2} u_n - 1}{u_n - 2} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{1}{2}$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -1.

2c. De la question précédente , on en déduit que pour tout entier naturel n :

$\boldsymbol{v_n} = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et comme $u_n = v_n + 2$

On en déduit alors, que pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

2) Exemple 2: cas où la limite est infinie:

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = 1,5\ u_n - 1$

1. A l'aide d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n).Comment semble se comporter la suite (u_n) en $+\infty$?

2. Déterminer la solution de l'équation $1,5x - 1 = x$

3. On considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

a) Calculer la valeur exacte des trois premiers termes de la suite (v_n).

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Réponse:

1.

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
1	0,5	-0,25	-1,375	-3,063	-5,594	-9,39063	-15,09	-23,629	-36,443	-55,665	-84,4976	-127,75	-192,62	-289,93	-435,89

Il semblerait que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

2. $1{,}5x - 1 = x$ d'où

$0{,}5x = 1$ d'où

$x = \frac{1}{0.5} = 2$

La solution de l'équation $\mathbf{1,5x - 1 = x}$ est 2

3 a. $u_0 = 1$ donc $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$

$u_1 = 0{,}5$ donc $v_1 = u_1 - 2 = 0{,}5 - 2 = -1{,}5$

$u_2 = -0{,}25$ donc $v_2 = u_2 - 2 = -0{,}25 - 2 = -2{,}25$

3 b. pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 1{,}5\ u_n - 1 - 2 = 1{,}5\ u_n - 3$

Donc pour tout entier naturel n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1{,}5\ u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{1{,}5\ (u_n - 2)}{u_n - 2} = 1{,}5$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme -1.

3 c. De la question précédente, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$\boldsymbol{v_n} = (-1) \times (1{,}5)^n = -(\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}}$

$u_n = v_n + 2$

On en déduit alors, que pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_n = -(1,5)^n + 2}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}} = +\boldsymbol{\infty}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -(\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}} = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = -\boldsymbol{\infty}$