Suites arithmétiques

I) Définition:

Soit n_0 un nombre un entier naturel

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est arithmétique si, partant du

TERME INITIAL u_{n_0}, pour passer d'un terme au suivant, on

AJOUTE toujours le même nombre appelé RAISON

Exemple : Pour un abonnement internet illimité, un opérateur propose les prix suivants : 40 € de frais d'établissement de ligne et 30 € par mois d'abonnement.

• Le budget total pour un mois d'abonnement est : 40 + 30 = 70
Le budget total pour un mois d'abonnement est de 70 €

• Le budget total pour deux mois d'abonnement est: 70 + 30 = 100
Le budget total pour deux mois d'abonnement est 100 €

• Le budget total pour trois mois d'abonnement est: 100 + 30 = 130
Le budget total pour un trois d'abonnement est de 130 €

Et ainsi de suite ……..On additionne 30 au prix du budget total du mois précédent pour obtenir celui du mois suivant

Soit u_1 le budget total pour un mois d'abonnement: u_1 = 70

u_2 est le budget total pour deux mois d'abonnement: u_2 = u_1 **+ 30** = 70 + 30 = 100

u_3 est le budget total pour trois mois d'abonnement: u_3 = u_2 **+ 30** = 100 + 30 = 130

Soit u_n le budget total pour n mois d'abonnement: $u_n = u_{n-1}$ **+ 30** où u_{n-1} est le budget pour $n-1$ mois d'abonnement

Cette suite est arithmétique : On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours par le même nombre (dans notre cas 30)

II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r ($r \in \mathbb{R}$)

Pour tout n entier naturel , $n \geq n_0$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On peut aussi obtenir directement la valeur de u_n en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 + nr$

Exemples :

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{23}

3) Calculer u_n en fonction de n

4) A partir de quel rang la suite u est–elle supérieure ou égale à 100 ?

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite est donc arithmétique de raison 3 et de 1[er] terme 1 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois 3).

2) $u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ **$u_1 = 4$**
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$ **$u_2 = 7$**
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$ **$u_3 = 10$**

On applique la 2[ème] formule :

$u_{23} = u_0 + 23 \times 3$
$u_{23} = 1 + 23 \times 3 = 70$ **$u_{23} = 70$**

3) $u_n = U_0 + n \times 3$ u_n = **$1 + 3n$**

4) $u_n \geq 100$ en utilisant la question précédente on obtient $1 + 3n \geq 100$

$3n \geq 99$ d'où $n \geq 33$. **A partir du terme d'indice 33 , u_n est supérieure ou égale à 100**

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n - 2$ et $\boldsymbol{u_1} = 5$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1} - u_n = -2. La suite est donc arithmétique de raison -2 et de 1^er^ terme 5 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois -2).

2) u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3 **u_2 = 3**
u_3 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1 **u_3 = 1**
u_4 = u_3 - 2 = 1 - 2 = -1 **u_4 = -1**

On applique la 2$^{\text{ème}}$ formule :

u_{30} = u_1 + (30 – 1) × (-2) le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est U_1 au lieu de U_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 + (n-1)r$

u_{30} = 5 + 29 × (-2) = -53 **u_{30} = -53**

3) u_n = u_1 +(n - 1) × (-2)

u_n = 5 +(n - 1) × (-2) u_n **= 7 - 2n**

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par u_3 = 4 et u_5 = 12.
Déterminer la raison et le 1$^{\text{er}}$ terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers m et n :

u_n = u_m + $(n-m)$ r

u_5 = u_3 + (5 – 3) r

12 = 4 + 2 r donc **r = 4.**

Son 1$^{\text{er}}$ terme est u_0 : U_3 = u_0 + 3 × 4 on obtient : 12 = u_0 + 12 donc **u_0 = 0**

La suite arithmétique u a pour raison 4 et a pour 1$^{\text{er}}$ terme u_0 = 0

Exemple 4 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par u_n = 3n + 8
Montrer que u est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son 1$^{\text{er}}$ terme u_0

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1} = 3(n+1) + 8 = 3n + 3+ 8 = 3n + 11
Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} -$ u_n = 3n + 11 – 3n – 8 = 3

La suite est donc arithmétique de raison 3. u_0 = 3×0 + 8 = 8.
Son 1$^{\text{er}}$ terme est u_0 = 8

III) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété:

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r

• Si r > 0, alors (u_n) est strictement croissante.

• Si r < 0, alors (u_n) est strictement décroissante.

• Si r = 0, alors (u_n) est constante.

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = u_n + r$ c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n = r$

• si r > 0 alors pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} > 0$ La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc strictement croissante.

• si r < 0 alors pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} < 0$ La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc strictement décroissante.

• si r = 0 alors pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} = 0$ ce qui veut dire que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n}$. La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc constante

Exemples:

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 3$

Donc u_{n+1} - $u_n = 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_{n+1} - $u_n > 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, par :

$u_{n+1} = u_n$ - 2 et $\boldsymbol{u_1} = 5$

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $u_{n+1} = u_n - 2$

Donc $u_{n+1} - u_n = -2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante

IV) Somme des entiers de 1 à n

1) Propriété:

Pour tout entier naturel non nul:

$$\mathbf{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cette formule a été proposée par Gauss à l'âge de 11 ans !

Exemple: Calculer S = 1 + 2 + 3 ...+ 10

S= 1 + 2 + 3 ...+ 10 $= \frac{10 \times 11}{2} = 55$ **S = 55**

2) Démonstration:

$$\left.\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 \end{array}\right]$$

On additionne membre à membre les 2 égalités

$$2S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + ... + (n - 1 + 2) + (n + 1)$$

$$2S = \underbrace{(1 + n) + (1 + n) + (1 + n) + ... + (1 + n) + (1 + n)}_{n \text{ termes}}$$

Chacun des n termes de cette somme est égal à $n + 1$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$