Exercice résolu 1 Utiliser la dérivée de la fonction exponentielle

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = 5\exp(x) + x$
2. $g(x) = (3x - 1)\exp(x)$

Solution commentée

1. $f'(x) = 5\exp(x) + 1$
2. $g'(x) = 3\exp(x) + (3x - 1)\exp(x) = (3x + 2)\exp(x)$

EXERCICE 1 p. 192

Exercice résolu 2 Transformer une expression

On donne les ordres de grandeur suivant : $\exp(2) \approx 7$, $\exp(3) \approx 20$ et $\exp(4) \approx 55$.

- En déduire les ordres de grandeur de $\exp(5)$, $\exp(-3)$ et $\exp(1)$.

Solution commentée

$\exp(5) = \exp(2 + 3) = \exp(2) \times \exp(3) \approx 7 \times 20 \approx 140$

$\exp(-3) = \dfrac{1}{\exp(3)} \approx \dfrac{1}{20} \approx 0{,}05$

$\exp(1) = \exp(4 - 3) = \dfrac{\exp(4)}{\exp(3)} \approx \dfrac{55}{20} \approx 2{,}75$

Exercice résolu 3 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour simplifier les expressions suivantes.

$A = \exp(x + 3) \times \exp(x - 1)$ $\quad B = (\exp(x))^2 \times \exp(3x)$ $\quad C = \dfrac{\exp(x - 1)}{\exp(x + 2)}$

Solution commentée

$A = \exp(x + 1) \times \exp(x - 1) = \exp(x + 1 + x - 1) = \exp(2x)$

$B = (\exp(x))^2 \times \exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(3x) = \exp(2x + 3x) = \exp(5x)$

$C = \dfrac{\exp(x - 1)}{\exp(x + 2)} = \exp[(x - 1) - (x + 2)] = \exp(x - 1 - x - 2) = \exp(-1) = \dfrac{1}{\exp(1)}$

EXERCICE 7 p. 192

Exercice résolu 4 Identifier une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 10 \times e^{3n}$.

1. Calculer u_0.
2. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. On rappelle que $e^3 \approx 20$.
   Justifier que la suite (u_n) est croissante puis déterminer mentalement à partir de quel rang on a $u_n > 10^6$.

Solution commentée

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 10 \times e^{3n}$,
   donc $u_0 = 10 \times e^0 = 10$.
2. Soit n un entier naturel.
   On a $u_{n+1} = 10 \times e^{3(n+1)} = 10 \times e^{3n+3}$
   $= 10 \times e^3 \times e^{3n} = e^3 \times u_n$.
   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = e^3$.
3. Pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 10 \times (e^3)^n \approx 10 \times 20^n$.
   $u_0 > 0$ et $e^3 > 1$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.
   De plus,
   $10 \xrightarrow{\times 20} 200 \xrightarrow{\times 20} 4\ 000 \xrightarrow{\times 20} 80\ 000 \xrightarrow{\times 20} 1\ 600\ 000 > 10^6$
   Donc u_n dépasse le million dès le rang $n = 4$.

EXERCICE 14 p. 193

Exercice résolu 1 Étudier une fonction avec une exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

- Dresser son tableau de variation.

Solution commentée

Pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$. On étudie le signe de la dérivée f'.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

On obtient le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

EXERCICE 16 p. 193

Exercice résolu 2 Résoudre une équation ou une inéquation

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $e^{2x+1} = 1$
2. $e^{3x-1} = e^{x+2}$
3. $e^{2x+1} \leqslant 1$

Solution commentée

1. $e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ car $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
   $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
2. $e^{3x-1} = e^{x+2} \Leftrightarrow 3x - 1 = x + 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ $\qquad S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$
3. $e^{2x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} \leqslant e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 \leqslant 0$ car $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
   $\Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est : $S = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right]$.

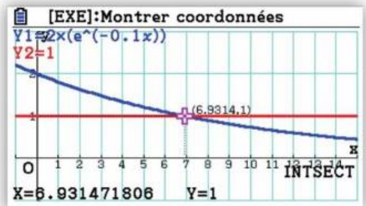
Exercice résolu 3 Étudier une fonction de la forme $f(t) = e^{-kt}$

Un condensateur de capacité C est branché aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R.
La tension aux bornes du condensateur en fonction du temps en seconde, est donnée par l'expression $u_c(t) = E \times e^{\frac{-t}{\tau}}$, où E représente la tension d'alimentation, exprimée en volt, et τ une constante telle que $\tau = RC$. (R en ohm (Ω) et C en farad (F)).
On donne $E = 2$ V, $R = 10$ kΩ et $C = 1\ 000$ µF.

1. Montrer que la tension aux bornes du condensateur est une fonction décroissante.
2. À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la tension aux bornes du condensateur sur l'intervalle $[0 ; 15]$ et déterminer le temps nécessaire pour que la tension du condensateur devienne inférieure à la moitié de la tension d'alimentation.

Solution commentée

1. $\tau = R \times C = 10 \times 10^3 \times 1\ 000 \times 10^{-6} = 10^1 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^{-6} = 10$
   Donc $u_c(t) = E \times e^{\frac{-t}{\tau}} = 2 \times e^{\frac{-t}{10}} = 2e^{-0{,}1t}$.
   On a $u'_c(t) = 2 \times (-0{,}1)\, e^{-0{,}1t} = -2e^{-0{,}1t} < 0$, donc la tension est décroissante.
2. Au bout d'environ 7 s, la tension devient inférieure à 1 V, soit la moitié de la tension d'alimentation.



EXERCICE 30 p. 194