On donne la fonction f définie sur $[-5;5]$ par $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

f est continue et dérivable sur $[-5;5]$ car f est un polynôme de degré 3

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)=6(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$ si $x=1$ ou $x=-2$

on en déduit le tab de variations de f :

x	-5		-2		1		5
signe de f'		+	0	−	0	+	
f	-114	↗	21	↘	-6	↗	246

<u>Conjecture</u> : l'équation $f(x)=10$ possède exctement 3 solutions sur $[-5;5]$

$\alpha=-3$; $\beta\simeq-0{,}686$; $\gamma\simeq 2{,}186$

<u>Preuve</u> :

On cherche les réels a et b tels que :

$2x^3+3x^2-12x-9=(x+3)(ax^2+bx+c)$

on a $(x+3)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$

$$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$$

donc $2x^3+3x^2-12x-9=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

Par identification des termes en x^3 , en x^2 , en x et *constant* on déduit que :

$$\begin{cases} a=2 \\ b+3a=3 \\ c+3b=-12 \\ 3c=-9 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=2 \\ b+3a=3 \\ c+3b=-12 \\ c=-3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=2 \\ b+3a=3 \\ 3b=-9 \\ c=-3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=2 \\ b+3a=3 \\ b=-3 \\ c=-3 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} a=2 \\ 3a=6 \\ b=-3 \\ c=-3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=-3 \end{cases} \text{ donc } 2x^3+3x^2-12x-9=(x+3)(2x^2-3x-3)$$

Par conséquent $f(x)=10 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x+1=10$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x-9=0 \Leftrightarrow (x+3)(2x^2-3x-3)=0$

$\Leftrightarrow x+3=0$ ou $2x^2-3x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ ou $x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$ ou $x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$

On vérifie bien que ces 3 solutions sont valides par rapport aux conjectures anoncées