Correction 1

1. La fonction f est continue sur les intervalles:
$\big[-4\,;-2\big]$; $\big]-2\,;1\big[$; $\big[1\,;4\big]$

2. - La fonction f est strictement croissante sur les intervalles:
$\big[-4\,;-2{,}5\big]$; $\big[-1\,;1\big[$; $\big[2{,}5\,;4\big]$
   - La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles:
$\big[-2{,}5\,;-2\big]$; $\big]-2\,;-1\big[$; $\big[1\,;2{,}5\big]$

Correction 2

1. Pour étudier la fonction f sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$, faisant l'étude suivante:
   - Sur l'intervalle $\big[-4\,;2\big]$, la fonction f passe de la valeur 3 à la valeur $-\dfrac{9}{2}$. Passant d'une valeur positive à une valeur négative, la fonction f s'annule une fois sur l'intervalle $\big[-4\,;2\big]$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution
   - Sur l'intervalle $\big[2\,;4\big]$, la fonction f admet pour maximum -1 qui est négatif: la fonction f étant strictement négative, l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

   Ainsi, sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$ n'admet aucune solution.

2. a. Sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$, la fonction f admettant un minimum de $-\dfrac{9}{2}$, on en déduit qu'elle n'atteindra jamais la valeur -6.
L'équation $f(x)=-6$ n'admet aucune solution.

   b. - Sur l'intervalle $\big[-4\,;2\big]$, la fonction f est décroissante et prenant toutes les valeurs de 3 à $-\dfrac{9}{2}$: la fonction f passera par la valeur -4.
L'équation $f(x)=-4$ admet une solution sur cet intervalle.
      - Sur l'intervalle $\big[2\,;4\big]$, la fonction f est croissante et prenant toutes les valeurs de $-\dfrac{9}{2}$ à -1: la fonction f prendra la valeur -4.
L'équation $f(x)=-4$ admet une solution sur cet intervalle.

   Ainsi, sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$, l'équation $f(x)=-4$ admet deux solutions.

   c. - Sur l'intervalle $\big[-4\,;2\big]$, la fonction f est décroissante et prenant toutes les valeurs de 3 à $-\dfrac{9}{2}$: la fonction f prendra la valeur -4.
L'équation $f(x)=-4$ admet une solution sur cet intervalle.
      - Sur l'intervalle $\big[2\,;4\big]$, la fonction f admet pour maximum la valeur -1. La fonction f ne prendra pas par la valeur 2.
L'équation $f(x)=2$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

   Ainsi, sur l'intervalle $\big[-4\,;4\big]$, l'équation $f(x)=-4$ admet une unique solution.

Correction 3

Effectuons une disjonction de cas pour répondre à cette question:

- Sur l'intervalle $\big[-5\,;3\big[$:
La fonction f admet pour maximum la valeur -1: elle ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\big[3\,;10\big]$:
La fonction f admet pour minimum la valeur 1: elle ne s'annule pas sur cet intervalle.

Ainsi, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution sur son ensemble de définition.

Correction 4

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est:
$f'(x) = 6{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x - 12$

   La fonction dérivée f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur:
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 6^2 - 4{\times}6{\times}(-12) = 36 + 288 = 324$
On a la simplification: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18$

   Le discriminant étant strictement positif, la fonction dérivée f' admet les deux zéros suivant:

   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-6-18}{2{\times}6} = \frac{-24}{12} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-6+18}{2{\times}6} = \frac{12}{12} = 1$$

   Le coefficient du terme du second degré définissant l'expression de la fonction f' étant strictement positif, on obtient le tableau de signes ci-dessous:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Par la fonction f, on a les images suivantes:
   - $f(-2) = 2{\times}(-2)^3 + 3{\times}(-2)^2 - 12{\times}(-2) + 4 = 24$
   - $f(1) = 2{\times}1^3 + 3{\times}1^2 - 12{\times}1 + 4 = 2 + 3 - 12 + 4 = -3$

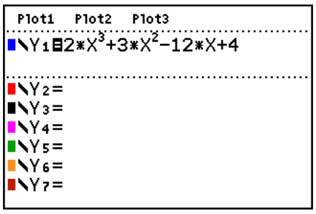
   Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations:

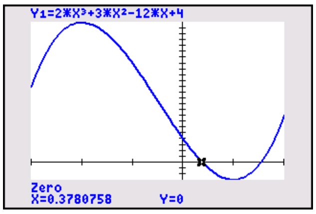
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	24 ↘	-3 ↗	$+\infty$

2. a. La fonction f a les propriétés suivantes:
   - la fonction f est continue sur l'intervalle $\big[-2\,;1\big]$.
   - la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\big[-2\,;1\big]$.
   - la fonction f change de signe sur l'intervalle $\big[-2\,;1\big]$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\big[-2\,;1\big]$.

   b. Avec l'utilisation de la calculatrice, on obtient les deux captures d'écrans ci-dessous:





Ainsi, le zéro α de la fonction f admet pour valeur approchée :
$\alpha \approx 0{,}38$

Correction 5

1. a. La fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = 2{\cdot}\big(3{\cdot}x^2\big) - 3{\cdot}\big(2{\cdot}x\big) - 12 = 6{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x - 12$$

b. Etudions le signe de la fonction f'. Son expression est un polynôme du second degré admettant pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-6\big)^2 - 4\times6\times(-12) = 36 + 288 = 324$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme du second degré admet les deux racines suivantes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-6)-18}{2\times6} = \frac{6-18}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-6)+18}{2\times6} = \frac{6+18}{12} = \frac{24}{12} = 2$$
Le signe du coefficient du terme du second degré étant strictement postif, on obtient le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$6{\cdot}x^2-6{\cdot}x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a les images suivantes par la fonction f :

- $f(-2) = 2\times(-2)^3 - 3\times(-2)^2 - 12\times(-2) + 1$
$= -16 - 12 + 24 + 1 = -3$
- $f(-1) = 2\times(-1)^3 - 3\times(-1)^2 - 12\times(-1) + 1$
$= -2 - 3 + 12 + 1 = 8$
- $f(2) = 2\times2^3 - 3\times2^2 - 12\times2 + 1$
$= 16 - 12 - 24 + 1 = -19$
- $f(3) = 2\times3^3 - 3\times3^9 - 12\times3 + 1$
$= 54 - 27 - 36 + 1 = -8$

On obtient le tableau de variations :

x	-2	-1	2	3
Variation de f	-3 ↗	8 ↘	-19 ↗	-8

2. Le tableau ci-dessous synthétise la recherche de solutions de chacune des équations sur chacun des intervalles de monotonie de la fonction f :

	$\big[-2\,;-1\big[$	$\big[-1\,;2\big[$	$\big[2\,;3\big]$	Nombres total de solutions
$f(x)=-10$	0	1	1	2
$f(x)=15$	0	0	0	0
$f(x)=-6$	0	1	0	1

Correction 6

1. a. Dérivons l'expression de la fonction g termes à termes :
$$g'(x) = -0{,}6 + 0 + \big(-\mathrm{e}^{-x+5}\big) = -0{,}6 - \mathrm{e}^{-x+5}$$

b. La fonction exponentielles étant strictement positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $\big[1\,;15\big]$, on a la comparaison :
$$\mathrm{e}^{-x+5} > 0$$
$$-\,\mathrm{e}^{-x+5} < 0$$
$$-\,0{,}6 - \mathrm{e}^{-x+5} < -0{,}6$$
$$-\,0{,}6 - \mathrm{e}^{-x+5} < -0{,}6 < 0$$
On retient la comparaison :
$$-\,0{,}6 - \mathrm{e}^{-x+5} < 0$$
$$g'(x) < 0$$
On en déduit que la dérivée g' est strictement négative sur l'intervalle $\big[1\,;15\big]$: la fonction g est décroissante sur cet intervalle.

2. a. On a les valeurs des deux images suivantes :

- $g(1) = -0{,}6\times1 + 4 + \mathrm{e}^{-1+5} = 3{,}4 + \mathrm{e}^4 \approx 57{,}99 \approx 58$
- $g(15) = -0{,}6\times15 + 4 + \mathrm{e}^{-15+5} = -5 + \mathrm{e}^{-10} \approx -4{,}99 \approx -5$

De la décroissante de la fonction g obtenue à la question 1. b., on a le tableau de variations :

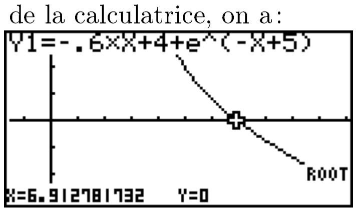
x	1	15
Variation de g	58 ↘	-5

b. La fonction g vérifie les conditions suivantes :

- g est continue sur $\big[1\,;15\big]$;
- g est strictement décroissante sur $\big[1\,;15\big]$;
- la valeur 0 est comprise entre 58 et -5, les images respectives de 1 et 15.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans l'intervalle $\big[1\,;15\big]$ solution de l'équation :
$g(x) = 0$

A l'aide de la calculatrice, on a :



On a la valeur approchée : $\alpha \approx 6{,}9$

c. On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $\big[1\,;15\big]$:

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Correction 7

1. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = -2{\cdot}x + 30 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -2 \quad ; \quad v'(x) = 0{,}2{\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) \\ &= -2{\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} + \big(-2{\cdot}x+30\big){\cdot}\big(0{,}2{\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}\big) \\ &= -2{\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} + \big(-0{,}4{\cdot}x+6\big){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} \\ &= \big(-2-0{,}4{\cdot}x+6\big){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} = \big(-0{,}4{\cdot}x+4\big){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3} \end{aligned}$$

b. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le signe de la fonction f a le même signe que son facteur $-0{,}4{\cdot}x+4$.
La fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$w(x) = -0{,}4{\cdot}x + 4$
est une fonction affine qui est décroissante car son coefficient directeur est négatif et qui s'annule en :

$$\begin{aligned} w(x) &= 0 \\ -0{,}4{\cdot}x + 4 &= 0 \\ -0{,}4{\cdot}x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{-0{,}4} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

On en déduit que ce facteur admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$-0{,}4{\cdot}x+4$		$+$	0	$-$	

Ainsi, la fonction f' admet pour tableau de signes sur l'intervalle $\big[-20\,;20\big]$:

x	-20		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Par la fonction f, on a les images suivantes :

- $f(-20) = \big[-2{\cdot}(-20)+30\big]{\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times(-20)-3}$
$= \big(40+30\big){\cdot}\mathrm{e}^{-4-3} = 70{\cdot}\mathrm{e}^{-7} \approx 0{,}064$
- $f(10) = \big[-2\times 10+30\big]{\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times(10)-3}$
$= \big(-20+30\big){\cdot}\mathrm{e}^{2-3} = 10{\cdot}\mathrm{e}^{-1} \approx 3{,}679$
- $f(20) = \big(-2{\cdot}20+30\big){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2\times 20-3}$
$= \big(-40+30\big){\cdot}\mathrm{e}^{4-3} = -10{\cdot}\mathrm{e}^{1} \approx -27{,}183$

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

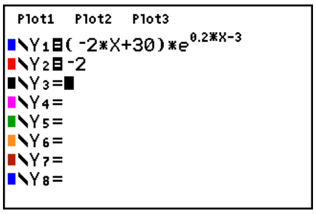
x	-20		10		20
Variation de f	$70{\cdot}\mathrm{e}^{-7}$	$\nearrow$	$10{\cdot}\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$-10{\cdot}\mathrm{e}^{1}$

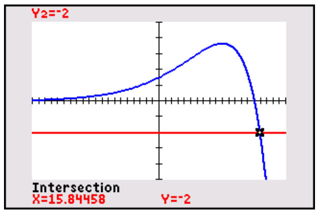
2. a.
- Sur l'intervalle $\big[-20\,;10\big]$, la fonction f est strictement positive. Ainsi, l'inéquation $f(x) = -2$ n'admet aucune solution.
- Sur l'intervalle $\big[10\,;20\big]$, la fonction f a pour propriétés :
  - la fonction f est continue sur $\big[10\,;20\big]$;
  - la fonction f est strictement décroissante sur $\big[10\,;20\big]$;
  - le nombre -2 est compris entre les images de 10 et 20 par la fonction f.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\big[10\,;20\big]$.

Ainsi, on en déduit que l'équation $f(x)-2$ admet une unique solution sur l'intervalle $\big[-20\,;20\big]$.

b. On a les captures d'écran ci-dessous :





On a l'encadrement de la racine α : $15{,}8 \leqslant \alpha \leqslant 15{,}9$

