Ex 1 : Vrai- Faux

1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur
   - FAUX car une intégrale s'exprime en unités d'aires
2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire
   - FAUX cela n'est vérifié que si la fonction est continue
3) L'intégrale d'une fonction continue peut être nulle
   - VRAI si les aires « positives » et « négatives » se compensent
4) Le résultat de $\int_a^b f(x)\,dx$ dépend de x
   - FAUX car une intégrale de dépend pas de la variable d'intégration
5) Si $f \geqslant 0$ et si $a<b$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ peut être négatif
   - FAUX d'après la propriété de « positivité » de l'intégrale
6) Une fonction f peut admettre au moins 4 primitives F
   - VRAI car toute fonction admet une infinité de primitives

Ex 2 : *Calculs d'aires sous la courbe*

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction f est positive sur $[a;b]$, puis calculer son intégrale sur $[a;b]$.

$f(x)=3x-1$ sur $[2;5]$

la fonction f est continue et croissante sur $[2;5]$

$f(2)=5>0$ et $f(5)=14>0$ donc f est positive sur $[2;5]$

$$\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^5 (3x-1)\,dx=[1{,}5x^2-x]_2^5=28{,}5\,ua$$

$f(x)=|x-3|$ sur $[1;4]$

on obtient $f(x)=\begin{cases}-x+3\ sur\,[1;3]\\ x-3\ sur\,[3;4]\end{cases}$ par définition $|x|\geqslant 0$ donc $f\geqslant 0$

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^3 (-x+3)dx+\int_3^4 (x-3)dx=[-0{,}5x^2+3x]_1^3+[0{,}5x^2-3x]_3^4=2{,}5\,ua$$

$f(x)=x(6-x)$ sur $[0;6]$

le tableau de variations de f est donné ci-dessous :

x	0		3		6
signe de f'		+	0	−	
f	0	↗	9	↘	0

On en déduit que f est positive sur $[0;6]$

$$\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6=36\,ua$$

$f(x)=x^3-3x+6$ sur $[-2;2]$

le tableau de variations de f est donné ci-dessous :

x	-2		-1		1		2
signe de f'		+	0	−	0	+	
f	4	↗	8	↘	4	↗	8

On en déduit que f est positive sur $[-2;2]$

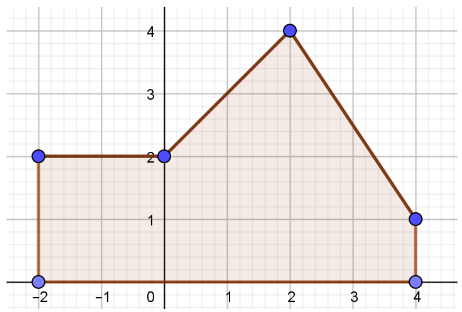
$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx=\int_{-2}^2 (x^3-3x+6)\,dx=[0{,}25x^4-1{,}5x^2+6x]_{-2}^2=24\,ua$$

Ex 3 : *Avec une fonction affine par morceaux*

la fonction f est définie par : $f(x)=\begin{cases}2 & si\ \ -2\leqslant x\leqslant 0\\ x+2 & si\ \ 0<x\leqslant 2\\ -1{,}5x+7 & si\ \ 2<x\leqslant 4\end{cases}$

Le graphique est donné ci-dessous :

la fonction f est clairement continue et positive sur $[-2;4]$

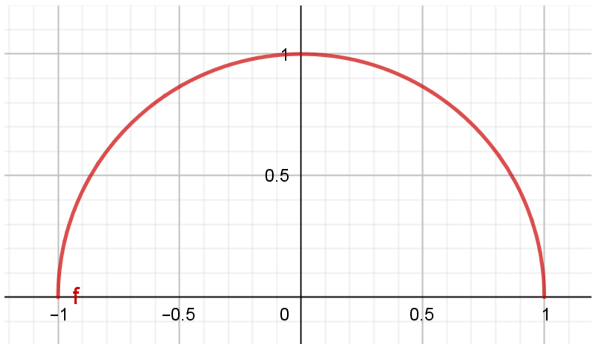


l'aire « sous la courbe » de f sur $[-2;4]$ est :

$$A_f=2^2+2\times 3+\frac{4+1}{2}\times 2=15\,ua$$

***Ex 4** : Avec un demi-cercle*

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$



l'équation est : $y=\sqrt{1-x^2}$

donc $y^2=1-x^2$

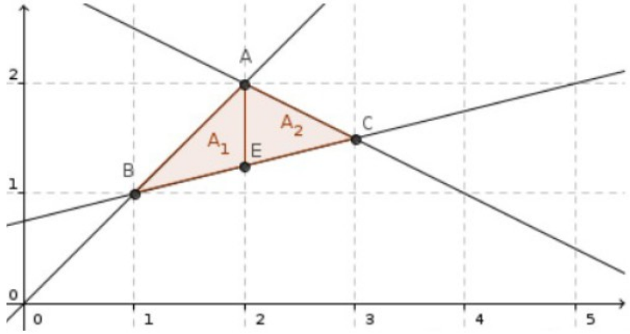
donc $x^2+y^2=1$

donc C_f est un cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon $r=1$

ainsi : $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ représente l'aire d'un demi-disque donc $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\pi\ ua$

***Ex 5** : Calculs d'aires avec GEOGEBRA*

On donne le graphique ci-dessous



la droite (AB) représente la fonction $f(x)=x$

la droite (AC) représente la fonction $g(x)=3-0{,}5x$

la droite (BC) représente la fonction $h(x)=0{,}25x+0{,}75$

on obtient :

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 x\,dx=[0{,}5x^2]_1^2=2-0{,}5=1{,}5\,ua$$

$$\int_1^2 h(x)\,dx=\int_1^2 (0{,}25x+0{,}75)\,dx=[0{,}125x^2+0{,}75x]_1^2=1{,}125\,ua$$

donc on déduit que $A_1=\int_1^2 (f(x)-h(x))\,dx=1{,}5-1{,}125=0{,}375\,ua$

de même : $\int_2^3 g(x)\,dx=\int_2^3 (3-0{,}5x)\,dx=[3x-0{,}25x^2]_2^3=1{,}75\,ua$

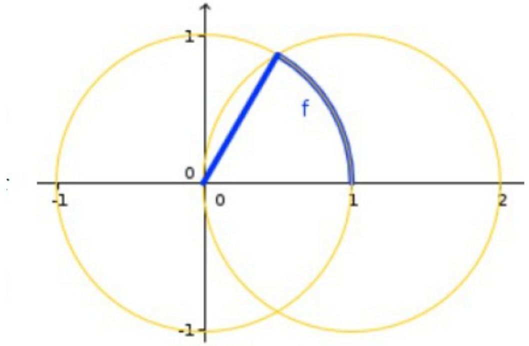
et $\int_2^3 h(x)\,dx=\int_2^3 (0{,}25x+075)\,dx=[0{,}125x^2+0{,}75x]_2^3=1{,}375\,ua$

donc on déduit que $A_2=\int_1^2 (g(x)-h(x))\,dx=1{,}75-1{,}375=0{,}375\,ua$

par conséquent l'aire globale est : $A=A_1+A2=0{,}75\,ua$

***Ex 6** : Aire d'une portion de disque*

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)



<u>méthode géométrique :</u>

$\int_0^1 f(x)\,dx$ représente l'aire d'un secteur de disque de centre $O(0;0)$ et de rayon $r=1$

soit

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}\times\pi\times 1^2=\frac{\pi}{6}\,ua$$

<u>méthode analytique :</u>

on a : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3}x & sur[0;0{,}5]\\ \sqrt{1-x^2} & sur[0{,}5;1]\end{cases}$

l'aire délimitée par le tracé est donc $A=\int_0^{0{,}5} \sqrt{3}x\,dx+\int_{0{,}5}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

soit $A=[\frac{\sqrt{3}x^2}{2}]_0^{0{,}5}+\int_{0{,}5}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

donc $A=\frac{\sqrt{3}}{8}+\int_{0{,}5}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ or $A=\frac{\pi}{6}$

donc on déduit que : $\int_{0{,}5}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

<u>Rque</u> : On appelle ce type d'intégrale des « intégrales abéliennes »