Correction 1

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :

$u(x) = 3{\cdot}x + 4 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = \frac{3{\cdot}(x^2{+}1) - (3{\cdot}x{+}4){\cdot}(2{\cdot}x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3{\cdot}x^2 + 3 - 6{\cdot}x^2 - 8{\cdot}x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3{\cdot}x^2 - 8{\cdot}x + 3}{(x^2+1)^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, déterminons le signe du numérateur qui est un polynôme du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-8)^2 - 4{\times}(-3){\times}3 = 64 + 36 = 100$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-8)-10}{2{\times}(-3)} = \frac{8-10}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-8)+10}{2{\times}(-3)} = \frac{8+10}{-6} = \frac{18}{-6} = -3$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, le quotient définissant la fonction f' admet pour signe :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f admet les images :

- $f(-3) = \dfrac{3{\times}(-3)+4}{(-3)^2+1} = \dfrac{-9+4}{9+1} = \dfrac{-5}{10} = -\dfrac{1}{2}$
- $f\Big(\dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{3{\times}\frac{1}{3}+4}{\big(\frac{1}{3}\big)^2+1} = \dfrac{1+4}{\frac{1}{9}+1} = \dfrac{5}{\frac{1+9}{9}} = \dfrac{5}{\frac{10}{9}}$
  $= 5{\times}\dfrac{9}{10} = \dfrac{9}{2}$

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

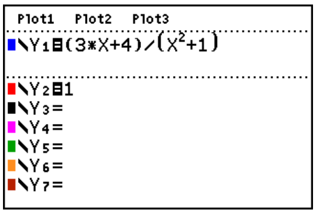
x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	

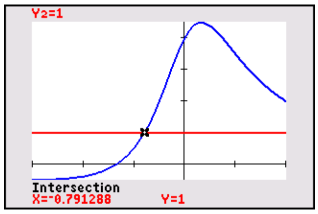
2. **a.** La fonction f vérifie les propriétés ci-dessous :

- La fonction f est continue sur l'intervalle $\Big[-3\,;\dfrac{1}{3}\Big]$;
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\Big[-3\,;\dfrac{1}{3}\Big]$;
- Le nombre 1 est compris entre les images $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{9}{2}$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $\Big[-3\,;\dfrac{1}{3}\Big]$.

b. Voici deux captures de l'écran de la calculatrice lors de la recherche de la valeur approchée :





La valeur approchée recherchée est : $-0{,}79$

Correction 2

1. **a.** L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 4{\cdot}x + 3 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 4 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x^2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{4{\cdot}(x^2+1) - (4{\cdot}x+3){\cdot}(2{\cdot}x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4{\cdot}x^2 + 4 - 8{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4}{(x^2+1)^2}$$

b. Pour étudier le signe de la fonction f', on s'intéresse au numérateur car le dénominateur est un carré et est donc toujours positif.

Le numérateur est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-6)^2 - 4{\times}(-4){\times}4 = 36 + 64 = 100$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-6)-10}{2{\times}(-4)} = \frac{6-10}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-6)+10}{2{\times}(-4)} = \frac{6+10}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a les images suivantes par la fonction f :

- $f(-5)=\dfrac{4\times(-5)+3}{(-5)^2+1}=\dfrac{-20+3}{25+1}=\dfrac{-17}{26}$
- $f(-2)=\dfrac{4\times(-2)+3}{(-2)^2+1}=\dfrac{-8+3}{4+1}=\dfrac{-5}{5}=-1$
- $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{4\times\frac{1}{2}+3}{\big(\frac{1}{2}\big)^2+1}=\dfrac{2+3}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{5}{\frac{5}{4}}=5\times\dfrac{4}{5}=4$
- $f(5)=\dfrac{4\times5+3}{5^2+1}=\dfrac{20+3}{25+1}=\dfrac{23}{26}$

On en déduit le tableau de variations :

x	-5		-2		$\frac{1}{2}$		5
Variation de f	$-\frac{17}{26}$	↘	-1	↗	4	↘	$\frac{23}{26}$

2. a. Raisonnons par une disjonction de cas :

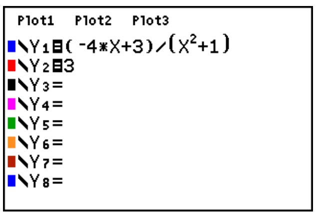
- Sur l'intervalle $\big[-5\,;-2\big]$:
  La fonction est strictement négative : l'équation $f(x)=3$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $\big[-5\,;-2\big]$
- Sur l'intervalle $\Big[-2\,;\dfrac{1}{2}\Big]$, la fonction f a les propriétés :
  - la fonction f est continue sur $\Big[-2\,;\dfrac{1}{2}\Big]$,
  - la fonction f est strictement croissante sur $\Big[-2\,;\dfrac{1}{2}\Big]$,
  - la valeur 3 est comprise entre -1 et 4.

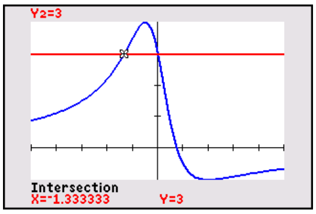
  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α appartenant à l'intervalle $\Big[-2\,;\dfrac{1}{2}\Big]$.
- Sur l'intervalle $\Big[\dfrac{1}{2}\,;5\Big]$, la fonction f a les propriétés :
  - la fonction f est continue sur $\Big[\dfrac{1}{2}\,;5\Big]$,
  - la fonction f est strictement croissante sur $\Big[\dfrac{1}{2}\,;5\Big]$,
  - la valeur 3 est comprise entre $\dfrac{23}{16}$ et 4.

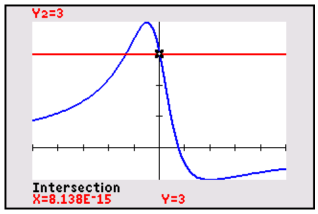
  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β appartenant à l'intervalle $\Big[\dfrac{1}{2}\,;5\Big]$.

Ainsi, l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions sur l'intervalle $\big[-5\,;5\big]$.

b. Voici des captures d'écrans de la calculatrice :







On obtient les deux valeurs approchées :

$\alpha\approx-1{,}33\quad;\quad\beta=0$

Correction 3

D'après le tableau de signes de la fonction f' et sachant qu'elle s'annule pour $x=3$, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
Variation de f		↘		↗	0	↗		↘	

On peut compléter le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $\big[1\,;5\big]$:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f(x)$				$-$	0	$+$			

On effectue les raisonnements par l'absurde suivant :

- Supposons que la fonction f n'est pas strictement négative sur $\big]-\infty\,;1\big]$. Ainsi, il existe un nombre x appartenant à l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$:
  - tel que $f(x)>0$. Elle changerait de signe sur $\big]-\infty\,;1\big]$ et par continuité, la fonction f s'annulerait sur cet intervalle, ce qui absurde puisque la fonction f admet un unique zéro pour $x=3$.
  - tel que $f(x)=0$, ce qui est absurde car la fonction f n'admet aucun zéro dans l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$.

  On en déduit que la fonction f est strictement négative sur $\big]-\infty\,;1\big]$.
- Supposons que la fonction f n'est pas strictement positive sur $\big[5\,;+\infty\big]$. Ainsi, il existe un nombre x apparte-ment à l'intervalle $\big[5\,;+\infty\big[$:
  - tel que $f(x)<0$. Elle changerait de signe sur $\big[5\,;+\infty\big[$ et par continuité, la fonction f s'annulerait sur cet intervalle, ce qui absurde puisque la fonction f admet un unique zéro pour $x=3$.
  - tel que $f(x)=0$, ce qui est absurde car la fonction f n'admet aucun zéro dans l'intervalle $\big[5\,;\infty\big[$.

  On en déduit que la fonction f est strictement positive sur $\big[5\,;+\infty\big[$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Correction 4

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
   $f(x)=u(x)\cdot v(x)-\mathrm{e}^x-1$
   où les fonctions u et v sont définies par :
   $u(x)=x\quad;\quad v(x)=\mathrm{e}^x$
   qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) - \mathrm{e}^x - 0$$
$$= 1\cdot\mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 0 = \mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\cdot\mathrm{e}^x$$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f' est positive sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. a. On a les valeurs approchées des deux images suivantes par la fonction f :

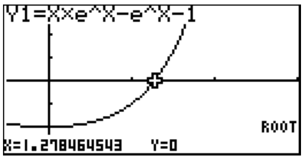
- $f(0) = 0\times\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 - 1 = 0 - 1 - 1 = -2$
- $f(2) = 2\times\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 - 1 = \mathrm{e}^2 - 1 \approx 6{,}39$

De plus :

- la fonction f est continue sur $\left[0\,;+\infty\right[$
- la fonction f est strictement croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$
- le nombre 0 est compris entre les images par la fonction f des bornes de l'intervalle $\left[0\,;2\right]$.

A l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre α solution de l'équation $f(x)=0$.

b. Voici une capture d'écran :



On en déduit un encadrement à l'unité de la valeur de α :

$1 < \alpha < 2$.

3. La fonction f étant croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et s'annulant en α, on en déduit le tableau de signes de la fonction f :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

