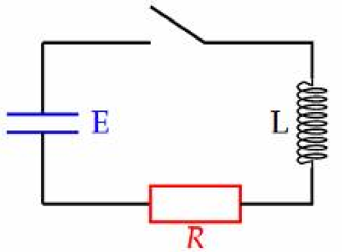
T MC — TD 2 – Les Équations différentielles (linéaires) — Mai 2021

Ex 1 : Le nombre de bactéries $N(t)$ d'une culture initialement à 600 passe au boût de 2 heures à 1 800. On suppose que le taux de croissance est proportionnel au nombre debactériesprésentes

1) Donner une équation différentielle qui traduit le problème puisdéterminer $N(t)$ à l'aide des conditions imposées
2) Déterminer le nombre de bactéries après 4 heures.
3) Déterminer le temps t nécessaire pour que cette boite de culture dépasse 12000 bactéries
4) Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il donne le résultat attendu à la question 1 c) (à la demi-heure près).

```
from math import*
t=0
N=600
while .... 12000:
    t=...
    N=...
print(...)
```

Ex 2 : Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction L , une résistance R . L'origine du temps est à la fermeture du circuit.
À $t=0$, l'intensité i est nulle. La force électromotrice aux bornes du circuit est constante et égale à E .
On sait que l'intensité $i(t)$ est telle que, à l'instant $t>0$ on a : $L.i'(t)+R.i(t)=E$



1) Résoudre cette équation différentielle et déterminer la fonction i vérifiant la condition initiale $i(0)=0$
2) Déterminer la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$
3) Commenter ce résultat dans le contexte de l'énoncé

Ex 3 : On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m.
On note $f(t)$ la taille, en m, d'un plant après t jours. (On a donc $f(0) = 0{,}1$).

Le *modèle de Verhulst* consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation : $f'(t)=a\,f(t)(1-f(t))$ où a est une constante dépendant des conditions expérimentales

Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}^+$, de l'équation différentielle : $y'=a\,y(1-y)$

1) On pose, pour tout t de $\mathbb{R}^+$: $z(t)=\dfrac{1}{f(t)}$ Déterminer une équation différentielle satisfaite par z , puis la résoudre
2) En déduire que pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$ on a : $f(t)=\dfrac{1}{1+9\,e^{-at}}$
3) On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (on arrondira à 10−2 près).
4) Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser son sens de variation.
5) Représenter graphiquement la fonction f.
6) Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?

Ex 4 : Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 ms−1 au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps (t = 0, en secondes) à ce moment là.
Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ on note $v(t)$ la vitesse (en ms−1) du parachutiste à l'instant t.
On admet que la résistance de l'air est donnée par : $R=\dfrac{P\,v^2}{25}$
où P est le poids du parachutiste avec son équipement.
($P = mg$, m = masse et g = 9,81 ms−2)

1) Démontrer que v est solution, sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle : $v'=g\left(1-\dfrac{v^2}{25}\right)$
2) On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $z=\dfrac{1}{v-5}$; Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}^+$ et la résoudre.
3) En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Ex 5 : On considère un circuit électrique constitué d'un condensateur (de capacité $C=4\,mF$) se déchargeant dans une résistance $R=500\,\Omega$. On note $u_C(t)$ la tension au borne du condensateur (en Volts) à l'instant t (en secondes).
À l'instant t = 0, on sait que $u_C(0)=10\,V$. (ainsi $q_0=10\,V$)

1) Exprimer $u_C(t)$ en fonction de t.
2) Déterminer la tension aux bornes de la résistance au bout de 5 sec
3) Au bout de combien de temps peut-on estimer que la décharge est terminée ?