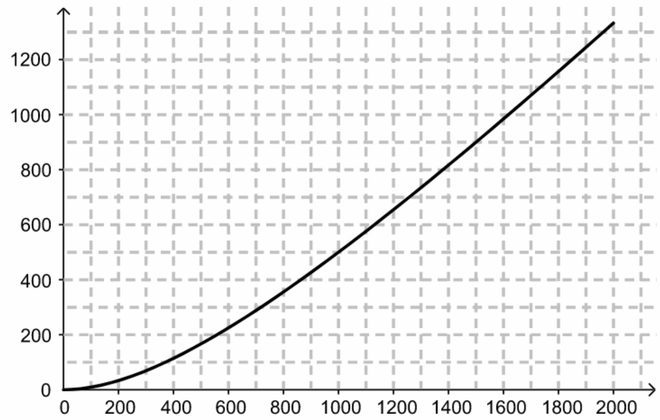
T T2 TD n° 2 : Fonctions rationnelles 2021

18 *(2014, Polynésie).* Pour une nouvelle mine de plomb, les experts d'une entreprise modélisent le chiffre d'affaires (en milliers d'euros) avec la fonction f définie sur $[0; 2000]$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1000}$ où x désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.
La représentation graphique de cette fonction est tracée ci-dessous.



Partie A

1. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2000x}{(x+1000)^2}$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0; 2000]$; en déduire le tableau de variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 500$ sur $[0; 2000]$.
4. Que signifie ce résultat pour l'entreprise ?

Partie B

Les coûts d'extraction et de traitement sont donnés (en milliers d'euros) par la fonction linéaire : $g(x) = 0{,}6x$ où x désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.

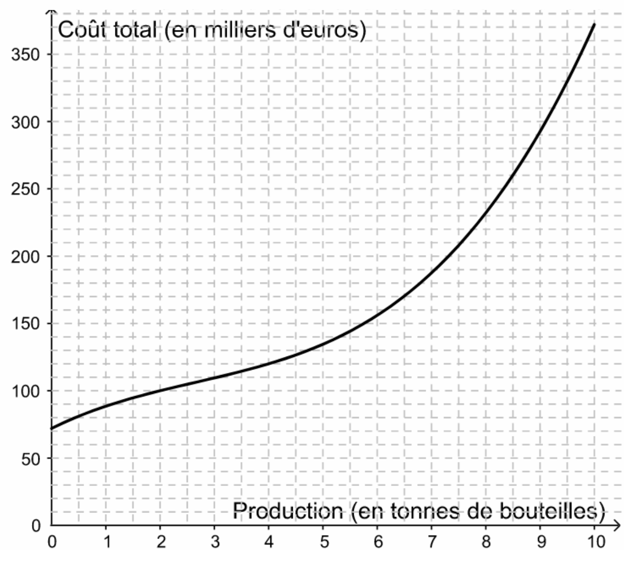
1. Tracer la droite d'équation $y = 0{,}6x$ sur le graphique.

2. Les géologues ont prévu d'extraire 1400 tonnes de plomb.
   Le chiffre d'affaires sera-t-il supérieur au coût ? Justifier la réponse.

19 *(2015, centres étrangers).* Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10. Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
2. Déterminer, par lecture graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par $C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction C_M.
2. Montrer que pour tout $x \in]0; 10]$, on a
$$C'_M(x) = \frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}.$$
3. Justifier que $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$ pour x variant dans l'intervalle $]0; 10]$ et en déduire le tableau des variations de la fonction C_M.
4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Montrer que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$ est
$$B(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 20x - 72.$$
2. Calculer le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes.
3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.

Partie A

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
2. Déterminer, par lecture graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par $C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction C_M.
2. Montrer que pour tout $x \in]0; 10]$, on a
$$C'_M(x) = \frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}.$$
3. Justifier que $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$ pour x variant dans l'intervalle $]0; 10]$ et en déduire le tableau des variations de la fonction C_M.
4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Montrer que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$ est
$$B(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 20x - 72.$$
2. Calculer le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes.
3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.