T^{ale} maths comp **TD2 – Limites de suites**

Calculs de limites

81 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

84 **Algo** python

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

1) a) Donner les conjectures relatives à cette suite

b) Créer un script *PYTHON* permettant de conjecturer la limite éventuelle de cette suite

2. a) On considère un entier $n \geqslant 1$. Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2+1}.$$

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, un encadrement de u_n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

87 **Algo** python

Un échantillon de 100 mL d'eau contient 50 000 bactéries pathogènes, rendant un plan d'eau impropre à la baignade. En temps normal, le nombre de bactéries diminue de 10 % par jour.

1. a) Modéliser l'évolution du nombre quotidien de bactéries à l'aide d'une suite et donner son expression.

b) Quelle est la limite de cette suite ?

c) La baignade sera à nouveau autorisée lorsqu'il n'y aura pas plus de 100 bactéries dans un échantillon de 100 mL. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de jours nécessaires.

2. Voici une fonction **Seuil** écrite en langage Python qui permet de répondre à la question précédente.

```
def Seuil(m):
    n=0
    c=50000
    while c>m:
        c=
        n=
    return n
```

a) Saisir ce programme en le complétant.

b) Utiliser ce programme pour retrouver la réponse à la question **1. c)**.

108 **Limite d'une suite arithmético-géométrique**

Parcours 1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

Montrer que la suite (u_n) converge.

Calculer la limite de cette suite

[on pourra utiliser une suite auxiliaire]

92 En 2019, Valentin a acquis un petit verger de pommes bio pour la somme de 10 000 €. La première année, la vente des pommes lui rapporte un bénéfice de 1 500 € ; mais chaque année, ses récoltes diminuent et son bénéfice baisse de 20 %.

Pour tout entier naturel n, on note b_n le bénéfice, en euro, réalisé en $2019+n$. Ainsi, $b_0 = 1500$.

a) Exprimer b_n en fonction de n.

b) Quel est le montant du bénéfice cumulé par Valentin au bout de 10 ans ? *Arrondir à l'unité.*

c) À long terme, Valentin aura-t-il récupéré son investissement initial ?

93 La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n.$$

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 2n + 4.$$

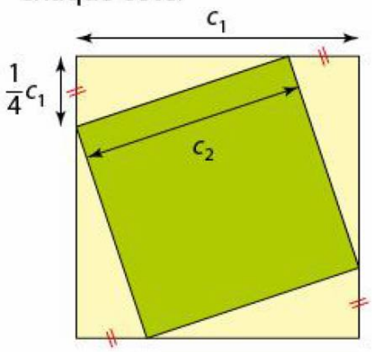
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

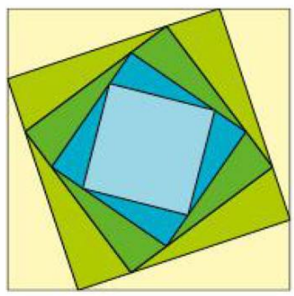
c) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

94 On construit une suite de carrés de la façon suivante :

- le premier carré a pour côté $c_1 = a$ avec $a > 0$;
- le $(n+1)$-ième carré est construit comme l'indique la figure ci-dessous, à partir du n-ième carré en reliant les quatre points du n-ième carré situés au quart de chaque côté.





On note, pour tout entier $n \geqslant 1$, c_n le côté et a_n l'aire du n-ième carré.

a) Expliquer pourquoi la suite (c_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Exprimer c_n en fonction de n et de a.

b) Montrer que la suite (a_n) est géométrique.

c) On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Exprimer A_n en fonction de n et de a.

d) Déterminer la limite de la suite (A_n).