

Ex 5 : Suite de «Babylone» et la méthode de Héron

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{b}{u_n} \right)$

- 1) Conjecturer la limite de cette suite pour les valeurs de $(a; b)$ suivantes : $(1; 2), (2; 2), (1; 3), (4; 3), (1; 5), (2; 5), (4; 5)$
- 2) Écrire une fonction $u(n, a, b)$ qui prend en entrée un entier n , deux nombres positifs a et b , et qui détermine puis renvoie le terme u_n

```
def u(n, a, b):
    '''In : indice n, entier naturel
    Out : u(n)'''
    assert n >= 0 and a >= 0 and b >= 0
    ...
    return ...
```

- 3) Écrire une fonction $f(n, a, b)$ qui prend en entrée un entier n , deux nombres positifs a et b , et qui détermine puis renvoie l'écart entre le terme u_n de la suite et \sqrt{b}

```
from math import * # pour utiliser pi
def f(n, a, b):
    '''In : indice n, entier naturel
    Out : abs(u(n) - racine(a))'''
    assert n >= 0 and a >= 0 and b >= 0
    ...
    return ...
```

- 4) Écrire une fonction $g(p, a, b)$ qui prend en entrée un entier n , deux nombres positifs a et b , et qui détermine puis renvoie le rang n à partir duquel l'écart entre le terme u_n de la suite et \sqrt{b} est inférieur à 10^{-p}

Ex 6 : La suite de Syracuse

En mathématiques, on appelle suite de Syracuse une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : On part d'un nombre entier plus grand que zéro;

- s'il est pair, on le divise par 2;
- s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

Par exemple, à partir de 10, on construit la suite des nombres : 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2...

C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 10. Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

On pose alors la suite (u_n) définie par $u_0 = N \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

- 1) Écrire une fonction $s(n)$ qui renvoie n divisé par 2 si n est pair et $3n + 1$ sinon. On pourra tester si n est bien entier.

Aide

- a % b** : Renvoie le reste de la division euclidienne de a par b .
- a // b** : Renvoie le quotient de la division euclidienne de a par b .
- a / b** : Renvoie le résultat de la division décimale de a par b .
- int(n)** : renvoie la partie entière de n .

- 2) Écrire une fonction **syr1(N,p)** qui renvoie la liste de p premiers termes de la suite, pour la suite de Syracuse de N , avec N et p entiers non nuls.
- 3) Écrire une fonction **syr2(N)** qui renvoie la liste des termes de la suite de Syracuse de N jusqu'à 1.
- 4) Écrire une fonction **syr3(N)** qui renvoie pour la suite de Syracuse de N :
 - a) Le temps de vol : c'est le plus petit indice n tel que $u_n = 1$.
 - b) L'altitude maximale : c'est la valeur maximale de la suite.

Ex 7 : Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75 u_n + 12$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

- 1) Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.
- 2) Écrire un programme qui affiche tous les termes de la suite de rang 0 à N , avec $N > 0$. Proposez un affichage du style (rang, terme).
- 3) Utilisez le programme précédent pour répondre à la question suivante : "La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100". Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne? Si oui, au bout de combien de mois ?

Code Python

```
def suite(N)
    # À compléter.
```