SOS maths - Primitives - Équations différentielles

Exercice 1

Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

a. $f'(x) = 3$ b. $f'(x) = 2x+1$ c. $f'(x) = x^3$

d. $f'(x) = -\dfrac{2}{x}$ e. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f. $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

Exercice 2

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x+1$ b. $g(x) = 1-3x$ c. $h(x) = 2x^2$

d. $i(x)=x^2+x+1$ e. $j(x) = 4x^3$ f. $k(x) = 1-2x^2$

Exercice 3

Déterminer une primitive de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ b. $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ c. $h(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

d. $j(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ e. $k(x) = \dfrac{1}{x}$ f. $\ell(x) = -\dfrac{1}{2x}$

g. $m(x) = \mathrm{e}^x$ h. $n(x) = 3\mathrm{e}^x$ i. $p(x) = -\mathrm{e}^x$

Exercice 4

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (x+3)^4$ b. $g(x) = (2-x)^3$

c. $h(x) = (2x-3)^2$ d. $j(x) = x\cdot(x^2+1)^6$

e. $k(x) = 3x^2\cdot(x^3-2)^3$ f. $\ell(x) = x^4\cdot(1-x^5)^2$

Exercice 5*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2\cdot(x^3-5)^5$ b. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c. $h(x) = \dfrac{6x+2}{(3x^2+2x-5)^2}$ d. $j(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x-5}$

Exercice 6

Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$ b. $g(x) = \dfrac{1}{1-3x}$

c. $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ d. $j(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

e. $k(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$ f. $\ell(x) = \dfrac{x}{x^4+2x^2+1}$

Exercice 7*

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ b. $g(x) = x\cdot\mathrm{e}^{x^2}$ c. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

d. $j(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ e. $k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}}{x^2}$ f. $\ell(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\ln(x)+1}}{x}$

Exercice 8

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a. $y' = -3y$ b. $y' - y = 0$

c. $5y' - 2y = 0$ d. $y = -3y'$

Exercice 9

Pour chaque question, déterminer la valeur de $a\in\mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :
$y' = a\cdot y$

a. $f(x) = -3\cdot\mathrm{e}^{4x}$ b. $f(x) = 4\cdot\mathrm{e}^{0,2x}$

Exercice 10

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y' - 3y = 0 \quad ; \quad f(0) = 2$

b. $2y' + 3y = 0 \quad ; \quad f(0) = -1$

c. $3y' - 2y = 0 \quad ; \quad f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2$

d. $y - 3y' = 0 \quad ; \quad f(6) = \mathrm{e}^3$

Exercice 11

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 2$ b. $y' - 3\cdot y = -3$

c. $6\cdot y = 3\cdot y' + 2$ d. $5\cdot y = \dfrac{3}{2}\cdot y' + \dfrac{1}{3}$

Exercice 12

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $4\cdot y' - y = 4 \quad ; \quad y(1) = e$

b. $15\cdot y' + 24\cdot y = 12 \quad ; \quad y\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2$

c. $-\dfrac{3}{2}\cdot y' + \dfrac{1}{4}\cdot y = -1 \quad ; \quad y(3) = 6 + 2\cdot e$

Exercice 13

On cherche à résoudre l'équation différentielle :
$(1) : \ y' - 2y = x\cdot\mathrm{e}^x$

1. Résoudre l'équation différentielle :
   $(2) : \ y' - 2y = 0,$
   où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $u(x) = \big(a\cdot x + b\big)\cdot\mathrm{e}^x$

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de (1).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

