Correction 1

a. $f(x) = 3x$

b. $f(x) = x^2 + x$

c. $f(x) = \frac{1}{4}x^4$

d. $f(x) = -2\ln(x)$

e. $f(x) = 2\sqrt{x}$

f. $f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}$

Correction 2

a. $F(x) = x^2 + x$

b. $G(x) = x - \frac{3}{2}x^2$

c. $H(x) = \frac{2}{3}\cdot x^3$

d. $I(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + x$

e. $J(x) = x^4$

f. $K(x) = x - \frac{2}{3}x^3$

Correction 3

a. La fonction f admet la fonction F pour primitive définie par la relation :
$F(x) = \frac{1}{x}$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$F'(x) = -\frac{1}{x^2} = f(x)$

b. La fonction g admet la fonction G pour primitive définie par la relation :
$G(x) = -\frac{2}{x}$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$G'(x) = -2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$

c. La fonction h admet la fonction H pour primitive définie par la relation :
$H(x) = \sqrt{x}$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$H'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d. La fonction j admet la fonction J pour primitive définie par la relation :
$J(x) = 4\sqrt{x}$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$J'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

e. La fonction k admet la fonction K pour primitive définie par la relation :
$K(x) = \ln x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$K'(x) = \frac{1}{x}$

f. La fonction ℓ admet la fonction L pour primitive définie par la relation :
$L(x) = -\frac{1}{2}\cdot\ln x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$L'(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{x} = -\frac{1}{2x}$

g. La fonction m admet la fonction M pour primitive définie par la relation :
$M(x) = e^x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$M'(x) = e^x$

h. La fonction n admet la fonction N pour primitive définie par la relation :
$N(x) = 3e^x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$N'(x) = 3\times e^x = 3e^x$

i. La fonction p admet la fonction P pour primitive définie par la relation :
$P(x) = -e^x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$P'(x) = -1\times e^x = -e^x$

Correction 4

a. En considérant la fonction u définie par :
$u(x) = x + 3 \quad ; \quad u'(x) = 1$
On a l'identification suivante :
$f(x) = (x+3)^4 = 1\cdot(x+3)^4 = u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^4$

Ainsi, la primitive F de la fonction f admet pour expression :
$F(x) = \frac{1}{5}\cdot\big[u(x)\big]^5 = \frac{1}{5}\cdot(x+3)^5$

b. En considérant la fonction u définie par :
$u(x) = 2 - x \quad ; \quad u'(x) = -1$
On a l'identification suivante :
$g(x) = (2-x)^3 = -(-1)\cdot(2-x)^3 = -u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^3$

Ainsi, la primitive G de la fonction g admet pour expression :
$G(x) = -\frac{1}{4}\big[u(x)\big]^4 = -\frac{1}{4}\cdot(2-x)^4$

c. En considérant la fonction u définie par :
$u(x) = 2x - 3 \quad ; \quad u'(x) = 2$
On a l'identification suivante :
$h(x) = (2x-3)^2 = \frac{1}{2}\times 2\cdot(2x-3)^2 = \frac{1}{2}\times u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^2$

Ainsi, la primitive H de la fonction h admet pour expression :
$H(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\cdot\big[u(x)\big]^3 = \frac{1}{6}\cdot(2x-3)^3$

d. En considérant la fonction u définie par :
$u(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2x$
On a l'identification suivante :
$j(x) = x\cdot(x^2+1)^6 = \frac{1}{2}\times(2x)\cdot(x^2+1)^6$
$= \frac{1}{2}\times u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^6$

Ainsi, la primitive J de la fonction j admet pour expression :
$J(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\cdot\big(x^2+1\big)^7 = \frac{1}{14}\cdot\big(x^2+1\big)^7$

e. En considérant la fonction u définie par :
$u(x) = x^3 - 2 \quad ; \quad u'(x) = 3x^2$
On a l'identification suivante :
$k(x) = 3x^2\cdot(x^3-2)^3 = u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^3$

Ainsi, la primitive K de la fonction k admet pour expression :

$$K(x)=\frac{1}{4}\cdot\big[u(x)\big]^4=\frac{1}{4}\big(x^3-2\big)^4$$

f. En considérant la fonction u définie par :

$u(x)=1-x^5\quad;\quad u'(x)=-5x^4$

On a l'identification suivante :

$$\ell(x)=x^4\cdot(1-x^5)^2=-\frac{1}{5}\times(-5x^4)\cdot(1-x^5)^2$$
$$=-\frac{1}{5}\times u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^2$$

Ainsi, la primitive ℓ de la fonction L admet pour expression :

$$L(x)=-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\cdot\big(1-x^5\big)^3=-\frac{1}{15}\cdot\big(1-x^5\big)^3$$

Correction 5

a. Considérons la fonction u définie par :

$u(x)=x^3-5\quad;\quad u'(x)=3\cdot x^2$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction f admet pour expression :

$$f(x)=x^2\cdot(x^3-5)^5=\frac{1}{3}\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^5$$
$$=\frac{1}{18}\times 6\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^5$$

Ainsi, la primitive F de la fonction f admet pour expression :

$$F(x)=\frac{1}{18}\times\big[u(x)\big]^6=\frac{1}{18}\times\big(x^3-5\big)^6$$

b. Considérons la fonction u définie par :

$u(x)=x^2+1\quad;\quad u'(x)=2x$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction g admet pour expression :

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

Ainsi, la primitive G de la fonction g admet pour expression :

$$G(x)=\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^2+1}$$

c. Considérons la fonction u définie par :

$u(x)=3x^2+2x-5\quad;\quad u'(x)=6x+2$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction h admet pour expression :

$$h(x)=\frac{6x+2}{(3x^2+2x-5)^2}=(-1)\times\Big[-\frac{6x+2}{(3x^2+2x-5)^2}\Big]$$
$$=(-1)\times\Bigg[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\Bigg]$$

Ainsi, la primitive H de la fonction h admet pour expression :

$$H(x)=(-1)\times\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{3x^2+2x-5}$$

d. Considérons la fonction u définie par :

$u(x)=3x^2+2x-5\quad;\quad u'(x)=6x+2$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction j admet pour expression :

$$j(x)=\frac{6x+2}{3x^2+2x-5}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ainsi, la primitive J de la fonction j admet pour expression :

$$J(x)=\ln\big[u(x)\big]=\ln\big(3x^2+2x-5\big)$$

Correction 6

a. En considérant la fonction u de la forme :

$u(x)=2x+3\quad;\quad u'(x)=2$

La fonction f admet pour expression :

$$f(x)=\frac{2}{2x+3}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

On en déduit l'expression de la fonction F primitive de la fonction f :

$$f(x)=\ln\big[u(x)\big]=\ln(2x+3)$$

b. En considérant la fonction u de la forme :

$u(x)=1-3x\quad;\quad u'(x)=-3$

La fonction g admet pour expression :

$$g(x)=\frac{1}{1-3x}=\Big(-\frac{1}{3}\Big)\times\frac{-3}{1-3x}=\Big(-\frac{1}{3}\Big)\times\frac{u'(x)}{u(x)}$$

On en déduit l'expression de la fonction G primitive de la fonction g :

$$G(x)=\Big(-\frac{1}{3}\Big)\cdot\ln\big[u(x)\big]=\Big(-\frac{1}{3}\Big)\times\ln(1-3x)$$
$$=-\frac{\ln(1-3x)}{3}$$

c. En considérant la fonction u de la forme :

$u(x)=x^2+1\quad;\quad u'(x)=2x$

La fonction h admet pour expression :

$$h(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$$

On en déduit l'expression de la fonction H primitive de la fonction h :

$$H(x)=\frac{1}{2}\times\ln\big[u(x)\big]=\frac{1}{2}\times\ln(x^2+1)=\frac{\ln(x^2+1)}{2}$$

d. En considérant la fonction u de la forme :

$u(x)=1+x\quad;\quad u'(x)=1$

La fonction j admet pour expression :

$$j(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$$

On en déduit l'expression de la fonction J primitive de la fonction j :

$$J(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{1+x}$$

e. En considérant la fonction u de la forme :

$u(x)=3x+1\quad;\quad u'(x)=3$

La fonction k admet pour expression :

$$k(x)=\frac{2}{(3x+1)^2}=\Big(-\frac{2}{3}\Big)\times\Big[-\frac{3}{(3x+1)^2}\Big]$$
$$=-\frac{2}{3}\times\Bigg[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\Bigg]$$

On en déduit l'expression de la fonction K primitive de la fonction k :

$$K(x)=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{u(x)}=-\frac{2}{3\cdot(3x+1)}$$

f. En considérant la fonction u de la forme :

$u(x)=x^2+1\quad;\quad u'(x)=2x$

La fonction ℓ admet pour expression :

$$\ell(x)=\frac{x}{x^4+2x^2+1}=\Big(-\frac{1}{2}\Big)\times\Big[-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Big]$$
$$=-\frac{1}{2}\times\Bigg[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\Bigg]$$

On en déduit l'expression de la fonction L primitive de la fonction ℓ :

$$L(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x^2+1)}=-\frac{1}{2\cdot(x^2+1)}$$

Correction 7

a. Considérons la fonction f définie par :
$u(x)=3x+1 \quad ; \quad u'(x)=3$
Ainsi, la fonction f admet pour expression :
$$f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}=\frac{1}{3}\times 3\cdot\mathrm{e}^{3x+1}=\frac{1}{3}\times u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$$
On en déduit l'expression de la primitive F de la fonction f :
$$F(x)=\frac{1}{3}\times\mathrm{e}^{u(x)}=\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}$$

b. Considérons la fonction g définie par :
$u(x)=x^2 \quad ; \quad u'(x)=2x$
Ainsi, la fonction g admet pour expression :
$$g(x)=x\cdot\mathrm{e}^{x^2}=\frac{1}{2}\times(2x)\cdot\mathrm{e}^{x^2}=\frac{1}{2}\times u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$$
On en déduit l'expression de la primitive G de la fonction g :
$$G(x)=\frac{1}{2}\times\mathrm{e}^{u(x)}=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}$$

c. Considérons la fonction h définie par :
$u(x)=\frac{1}{x} \quad ; \quad u'(x)=-\frac{1}{x^2}$
Ainsi, la fonction h admet pour expression :
$$h(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}=(-1)\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=(-1)\times u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$$
On en déduit l'expression de la primitive H de la fonction h :
$$H(x)=(-1)\times\mathrm{e}^{u(x)}=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

d. Considérons la fonction j définie par :
$u(x)=\sqrt{x} \quad ; \quad u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Ainsi, la fonction j admet pour expression :
$$j(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}=2\times u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$$
On en déduit l'expression de la primitive J de la fonction j :
$$J(x)=2\times\mathrm{e}^{u(x)}=2\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

e. Considérons la fonction k définie par :
$u(x)=\frac{x+1}{x} \quad ; \quad u'(x)=-\frac{1}{x^2}$
Ainsi, la fonction k admet pour expression :
$$k(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}}{x^2}=(-1)\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\cdot\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}$$
$$=(-1)\times u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$$
On en déduit l'expression de la primitive K de la fonction k :
$$K(x)=(-1)\times\mathrm{e}^{u(x)}=-\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}$$

f. Considérons la fonction ℓ définie par :
$u(x)=\ln(x)+1 \quad ; \quad u'(x)=\frac{1}{x}$
Ainsi, la fonction ℓ admet pour expression :
$$\ell(x)=\frac{\mathrm{e}^{\ln(x)+1}}{x}=\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{\ln(x)+1}=u'(x)\cdot\mathrm{e}^{\ln(x)+1}$$
On en déduit l'expression de la primitive L de la fonction ℓ :
$$L(x)=\mathrm{e}^{u(x)}=\mathrm{e}^{\ln(x)+1}$$

Correction 8

a. Les fonctions solutions de léquation différentielles :
$y'=-3y$
sont de la forme :
$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{-3x}$ où $C\in\mathbb{R}$ est une constante.

b. L'équation différentielle proposée s'écrit :
$$y'-y=0$$
$$y'=y$$
Ainsi, les solutions de cette équation différentielle ont pour expression :
$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{x}$ où $C\in\mathbb{R}$ est une constante.

c. On a :
$$5y'-2y=0$$
$$5y'=2y$$
$$y'=\frac{2}{5}\cdot y$$
Cette équation a pour solution l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme :
$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\cdot x}$ où $C\in\mathbb{R}$ est une constante.

d. Pour pouvoir utiliser le cours, il faut transformer l'écriture de cette équation différentielle :
$$y=-3y'$$
$$-\frac{1}{3}\cdot y=y'$$
$$y'=-\frac{1}{3}\cdot y$$
Ainsi, les solutions de cette équation admettent tous pour écriture :
$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\cdot x}$ où C est une constante.

Correction 9

a. f est solution de l'équation $(a=4)$:
$y'=4\cdot y$
La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x)=-12\cdot\mathrm{e}^{4x}$
Vérifions que f est solution de l'équation différentielle proposée :
$4\cdot f(x)=4\times\big(-3\cdot\mathrm{e}^{4x}\big)=-12\cdot\mathrm{e}^{4x}=f'(x)$

b. f est solution de l'équation $(a=0,2)$:
$y'=0,2\cdot y$
La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x)=0,8\cdot\mathrm{e}^{0,2x}$
Vérifions que f est solution de l'équation différentielle proposée :
$0,2\cdot f(x)=0,2\times\big(4\cdot\mathrm{e}^{0,2x}\big)=0,8\cdot\mathrm{e}^{0,2x}=f'(x)$

Correction 10

a. La relation différentielle proposée s'écrit également :
$y'=3\cdot y$
L'ensemble des solutions ont pour écriture :
$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{3x}$ où $C\in\mathbb{R}$.

La condition initiale $f(0)=2$ va nous servir à déterminer la valeur de C :
$$f(0)=2$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{3\cdot 0}=2$$
$$C=2$$
Ainsi, l'équation différentielle $\begin{cases} y'-3y=0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ a pour solution :
$$f(x)=2\cdot\mathrm{e}^{3x}$$

b. On a :

$$2y'+3y=0$$
$$2y'=-3y$$
$$y'=-\frac{3}{2}y$$
Ainsi, toutes les solutions de cette équation admettent l'écriture :
$$f(x)=C\cdot e^{-\frac{3}{2}x}$$
Cherchons la valeur de C afin que la condition initiale soit vérifiée :
$$f(0)=-1$$
$$C\cdot e^{-\frac{3}{2}\cdot 0}=-1$$
$$C\cdot e^{0}=-1$$
$$C=-1$$
Ainsi, la fonction f définie par $f(x)=-e^{-\frac{3}{2}\cdot x}$ est solution de léquation différentielle :
$$\begin{cases} 2y'+3y=0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

c. L'équation différentielle devient :
$$3y'-2y=0$$
$$3y'=2y$$
$$y'=\frac{2}{3}y$$
Ainsi, la solution de léquation différentielle :
$$\begin{cases} 3y'-2y=0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=2 \end{cases}$$
a pour expression : $f(x)=C\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x}$ où $C\in\mathbb{R}$

Pour vérifier la condition initiale, la fonction f doit vérifier :
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2$$
$$C\cdot e^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}}=2$$
$$C\cdot e^{1}=2$$
$$C=2\cdot e^{-1}$$
Ainsi, la fonction f a pour expression :
$$f(x)=2\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x}=2\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x-1}$$

d. La relation différentielle recherchée s'écrit également :
$$y-3y'=0$$
$$-3y'=-y$$
$$y'=\frac{1}{3}\cdot y$$
Ainsi, les solutions de cette équation différentielle ont pour expression :
$$f(x)=C\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$
Pour vérifier la condition initiale, la valeur de C doit vérifier :
$$f(6)=e^3$$
$$C\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot 6}=e^3$$
$$C\cdot e^2=e^3$$
$$C=e^3\cdot e^{-2}$$
$$C=e^{3+(-2)}$$
$$C=e^1$$
Ainsi, la fonction f admet pour écriture :
$$f(x)=e^1\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x}=\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x+1}$$

Correction 11

a. L'équation différentielle proposée s'écrit également :
$$y'+y=2$$
$$y'=-y+2$$
Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x)=C\cdot e^{-x}-\frac{2}{-1}=C\cdot e^{-x}+2 \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

b. L'équation différentielle proposée s'écrit également :
$$y'-3\cdot y=-3$$
$$y'=3\cdot y-3$$
Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x)=C\cdot e^{3x}-\frac{-3}{3}=C\cdot e^{3x}+1 \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

c. L'équation différentielle proposée s'écrit également :
$$6\cdot y=3\cdot y'+2$$
$$6\cdot y-2=3\cdot y'$$
$$3\cdot y'=6\cdot y-2$$
$$y'=2\cdot y-\frac{2}{3}$$
Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x)=C\cdot e^{2x}-\frac{-\frac{2}{3}}{2}=C\cdot e^{2x}+\frac{1}{3} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

d. L'équation différentielle proposée s'écrit également :
$$5\cdot y=\frac{3}{2}\cdot y'+\frac{1}{3}$$
$$\frac{3}{2}\cdot y'=5\cdot y-\frac{1}{3}$$
$$y'=\frac{2}{3}\times 5\cdot y-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$y'=\frac{10}{3}\cdot y-\frac{2}{9}$$
Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x)=C\cdot e^{\frac{10}{3}\cdot x}-\frac{-\frac{2}{9}}{\frac{10}{3}}=C\cdot e^{\frac{10}{3}\cdot x}+\frac{1}{15} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

Correction 12

a. La fonction f recherchée doit vérifier l'équation différentielle suivante :
$$4\cdot y'-y=4$$
$$4\cdot y'=y+4$$
$$y'=\frac{1}{4}\cdot y+1$$
Ainsi, la fonction f admet pour expression :
$$f(x)=C\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}-\frac{1}{\frac{1}{4}}=C\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}-4 \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$
La condition initiale va nous permettre de déterminer l'expression de la fonction f :
$$f(1)=e$$
$$C\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot 1}-4=e$$
$$C\cdot e^{\frac{1}{4}}=e+4$$
$$C=e^{-\frac{1}{4}}\cdot(e+4)$$
On obtient ainsi l'expression complète de la fonction f :
$$f(x)=e^{-\frac{1}{4}}\cdot(e+4)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}-4=(e+4)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{4}}-4$$

b. L'équation différentielle recherchée est :

$15y'+24y=12$

$$15\cdot y' = -24\cdot y+12$$
$$y' = -\frac{24}{15}\cdot y+\frac{12}{15}$$
$$y' = -\frac{8}{5}\cdot y+\frac{4}{5}$$

Ainsi, la fonction f admet une expression de la forme :

$$f(x) = C\cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x} - \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{8}{5}} = C\cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x}+\frac{1}{2} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

La condition initiale permet d'obtenir la valeur de C :

$$f\Big(\frac{5}{4}\Big)=2$$
$$C\cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{5}\times\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}=2$$
$$C\cdot \mathrm{e}^{-2}=2-\frac{1}{2}$$
$$C\cdot \mathrm{e}^{-2}=\frac{3}{2}$$
$$C=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{2}$$

L'expression de la fonction f, solution de l'équation différentielle, est :

$$f(x)=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x+2}+\frac{1}{2}$$

c. L'équation différentielle recherché peut également s'écrire :

$$-\frac{3}{2}\cdot y'+\frac{1}{4}\cdot y=-1$$
$$-\frac{3}{2}\cdot y' = -\frac{1}{4}\cdot y-1$$
$$y' = \Big(-\frac{2}{3}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{4}y\Big)-\Big(-\frac{2}{3}\Big)\cdot 1$$
$$y' = \frac{1}{6}\cdot y+\frac{2}{3}$$

Ainsi, la fonction f solution de cette équation admet pour expression :

$$f(x)=C\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{6}x}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}=C\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{6}x}-4 \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

Cherchons la valeur de C afin que la condition initiale soit vérifiée :

$$f(3)=6+2\cdot e$$
$$C\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{6}\cdot 3}-4=6+2\cdot e$$
$$C\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-4=6+2\cdot e$$
$$C\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=10+2\cdot e$$
$$C=\big(10+2e\big)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

L'expression de f est :

$$f(x)=\big(10+2e\big)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{6}x}-4=\big(10+2e\big)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}}-4$$

Correction 13

1. L'équation (2) s'écrit également :

$y'=2y$

Les solutions de cette équation admettent une expression de la forme :

$f(x)=C\cdot \mathrm{e}^{2x}$ où $C\in\mathbb{R}$ est une constante.

2. a. La fonction u est donnée sous la forme du produit $v\cdot w$ où :

$v(x)=ax+b \quad ; \quad w(x)=\mathrm{e}^{x}$

qui admettent pour dérivée :

$v'(x)=a \quad ; \quad w'(x)=\mathrm{e}^{x}$

Ainsi, par la formule de dérivée d'un produit, la fonction u admet pour expression :

$$u'(x)=v'(x)\cdot w(x)+v(x)\cdot w'(x)$$
$$=a\cdot \mathrm{e}^{x}+(a\cdot x+b)\cdot \mathrm{e}^{x}=(a\cdot x+b+a)\cdot \mathrm{e}^{x}$$

Puisque la fonction u vérifie l'équation différentielle (1), on doit avoir l'égalité suivante, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$u'(x)-2u(x)=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$(a\cdot x+b+a)\cdot \mathrm{e}^{x}-2\cdot(ax+b)\cdot \mathrm{e}^{x}=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$\Big[(a\cdot x+b+a)-2\cdot(ax+b)\Big]\cdot \mathrm{e}^{x}=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$(-a\cdot x+a-b)\cdot \mathrm{e}^{x}=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive :

$$-a\cdot x+a-b=x$$

Par identification terme à terme de ces polynômes, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a=1 \\ a-b=0 \end{cases}$$

On en déduit les valeurs suivantes de a et de b :

$a=-1 \quad ; \quad b=-1$

Ainsi, l'expression de la fonction u est donnée par :

$u(x)=-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{x}$

b. Montrons cette équivalence :

- $\Longrightarrow$ Supposons que la fonction v est solution de l'équation (2) :

  Vérifions que la fonction $(u+v)$ est solution de l'équation (1) :

$$(u+v)'(x)-2\cdot(u+v)(x)=u'(x)+v'(x)-2\cdot u(x)-2\cdot v(x)$$
$$=\big[u'(x)-2\cdot u(x)\big]+\big[v'(x)-2\cdot v(x)\big]$$
$$=\big(u'-2\cdot u\big)(x)+\big(v'-2\cdot v\big)(x)$$

u est solution de (1) ; v est solution de (2)

$$=x\cdot \mathrm{e}^{x}+0=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$

  On en déduit que la fonction $(u+v)$ est solution de (1)

- $\Longrightarrow$ Supposons que $(u+v)$ solution de (1) :

  On a alors l'égalité suivante :

$$(u+v)'(x)-2(u+v)(x)=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$u'(x)+v'-2\cdot u(x)+2\cdot v(x)=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$\big[u'(x)-2\cdot u(x)\big]+\big[v'(x)+2\cdot v(x)\big]=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$\big(u'-2\cdot u\big)(x)+\big(v'+2\cdot v\big)(x)=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$

  u est solution de (1) :

$$x\cdot \mathrm{e}^{x}+\big(v'+2\cdot v\big)(x)=x\cdot \mathrm{e}^{x}$$
$$\big(v'+2\cdot v\big)(x)=0$$
$$v'+2\cdot v=0$$

  De l'égalité précédente, on déduit que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (2).

c. f une solution de (1)

$\Longleftrightarrow u+(f-u)$ est une solution de (1)

D'après la question 2. b. :

$\Longleftrightarrow (f-u)$ est une solution de (2)

D'après la question 1. :

$\Longleftrightarrow$ Il existe $C\in\mathbb{R}$: $\big(f-u\big)(x)=C\cdot \mathrm{e}^{2x}$

$\Longleftrightarrow f(x)=C\cdot \mathrm{e}^{2x}+u(x)$

$\Longleftrightarrow f(x)=C\cdot \mathrm{e}^{2x}-(x+1)\cdot \mathrm{e}^{x}$

3. La solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 doit vérifier :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ C{\cdot}\mathrm{e}^0 - (0+1){\cdot}\mathrm{e}^0 &= 0 \\ C - 1 &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de la fonction recherchée est :
$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1){\cdot}\mathrm{e}^x$

