Exercice 1*

La suite (u_n) est définit par $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{4}{5}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3*

On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.

2. Exprimer v_n en fonction du rang n.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$ b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$ e. $\dfrac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non-nul : $\dfrac{n}{n + \sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$

2. En déduire la convergence de la suite (u_n) ; on précisera la valeur de la limite.

