Correction 1

Les deux droites (d) et (d') sont sécantes si, et seulement si, il existe deux valeurs des paramètres t et t' définissant les coordonnées d'un même point.
Ainsi, ces deux valeurs sont solutions du système :

$$\begin{cases} -t = 4+t' \\ -1-t = 3+t' \\ 5+3t = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -t-t' = 4 \\ -t-t' = 4 \\ 3t = -6 \end{cases}$$

De la troisième équation, on obtient la valeur de t :

$$3t = -6$$
$$t = \frac{-6}{3}$$
$$t = -2$$

En utilisant cette valeur dans la première équation, on a :

$$-t-t' = 4$$
$$-(-2)-t' = 4$$
$$2-t' = 4$$
$$-t' = 2$$
$$t' = -2$$

Le couple $(-2\,;-2)$ vérifie toutes les équations du système, on en déduit que les droites s'interceptent. En utilisant le paramètre -2 dans la représentation de la droite (d), on obtient les coordonnées du points d'intersection des droites (d) et (d') :

$$\begin{cases} x = -(-2) = 2 \\ y = -1-(-2) = 1 \\ z = 5+3\times(-2) = -1 \end{cases}$$

Ainsi : $M\,(2\,;1\,;-1)$

Correction 2

1. Déterminons les coordonnés des deux vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$
$$= \big(1-2\,;0-0\,;3-(-1)\big) = \big(-1\,;0\,;3+1\big) = \big(-1\,;0\,;4\big)$$
- $\overrightarrow{AC}\,(x_C-x_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A)$
$$= \big(2-2\,;1-0\,;1-(-1)\big) = \big(0\,;1\,;1+1\big) = \big(0\,;1\,;2\big)$$

En observant les abscisses des coordonnées de ces deux vecteurs, on en déduit qu'il n'existe pas de réel α vérifiant l'égalité :
$$\overrightarrow{AB} = \alpha\cdot\overrightarrow{AC}$$
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et C définissent un plan.

2. Tout point du plan M vérifie la relation vectorielle :
$$\overrightarrow{AM} = t\cdot\overrightarrow{AB}+t'\cdot\overrightarrow{AC} \quad \text{où } t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R}$$

- Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ admet pour coordonnées :
$$\overrightarrow{AM}\,(x_M-x_A\,;y_M-y_A\,;z_M-z_A)$$
$$= \big(x-2\,;y\,;z-(-1)\big) = \big(x-2\,;y\,;z+1\big)$$
- Pour tout point du M du plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de ce plan. Ainsi, on a l'existence de deux réels t et t' vérifiant l'égalité vectorielle :
$$\overrightarrow{AM} = t\cdot\overrightarrow{AB}+t'\cdot\overrightarrow{AC}$$
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées :
$$\overrightarrow{AM}\,\big(t\times(-1)+t'\times0\,;t\times0+t'\times1\,;t\times4+t'\times2\big)$$
$$= \big(-t\,;t'\,;4t+2t'\big)$$

Par identification des deux écritures des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$, on en déduit le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} x-2 = -t \\ y = t' \\ z+1 = 4t+2t' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -t+2 \\ y = t' \\ z = 4t+2t'-1 \end{cases}$$

3. Pour que le point D appartiennent au plan (ABC), le système ci-dessous doit admettre une solution :
$$\begin{cases} 1 = -t+2 \\ -2 = t' \\ -1 = 4t+2t'-1 \end{cases}$$
De la première et seconde ligne, on obtient facilement la valeur d'un couple $(t\,;t')$ qui est $(1\,;-2)$. Il reste à vérifier que ce couple soit également solution de la troisième équation :
$$4t+2t'-1 = 4\times1+2\times(-2)-1 = 4-4-1 = -1$$
On en déduit que le couple $(1\,;-2)$ est solution de ce système : le point D est un point du plan (ABC).

Correction 3

On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{AB} = (x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A) = \big(-5\,;3\,;-2\big)$
- $\overrightarrow{AC} = (x_C-x_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A) = \big(-4\,;-1\,;-1\big)$
- $\overrightarrow{AD} = (x_D-x_A\,;y_D-y_A\,;z_D-z_A)$
$$= \big(5-3\,;8-(-1)\,;4-5\big) = \big(2\,;9\,;-1\big)$$

Pour étudier la coplanaiarité des point A, B, C et D, il faut étudier l'équation suivante :
$$\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}+\gamma\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$$

En étudions pour chaque coordonnées cette équation, on obtient l'expression :
$$\begin{cases} \alpha\cdot(-5)+\beta\cdot(-4)+\gamma\cdot2 = 0 \\ \alpha\cdot3+\beta\cdot(-1)+\gamma\cdot9 = 0 \\ \alpha\cdot(-2)+\beta\cdot(-1)+\gamma\cdot(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -5\alpha-4\beta+2\gamma = 0 \\ 3\alpha-\beta+9\gamma = 0 \\ -2\alpha-\beta-\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha+24\beta-12\gamma = 0 \\ 30\alpha-10\beta+90\gamma = 0 \\ 30\alpha+15\beta+15\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha+24\beta-12\gamma = 0 \\ 34\beta-102\gamma = 0 \\ 9\beta-27\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha+24\beta-12\gamma = 0 \\ \beta-3\gamma = 0 \\ \beta-3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha+24\beta-12\gamma = 0 \\ 3\gamma = -\beta \end{cases}$$

En choisissant la valeur $\beta=3$, on obtient :

$$\Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha+24\beta-12\gamma = 0 \\ -3\gamma = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha+72-12\times1 = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 30\alpha = 60 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'équation vectorielle admet notamment le triplet $\big(2\,;3\,;1\big)$ non-nul pour solution : on en déduit que les quatre points ne sont pas coplanaires.

Correction 4

Effectuons le calcul des distances de chacun des côtés du triangle ABC :

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
  $= (-10)^2 + (-3)^2 + (-5)^2 = 100 + 9 + 25 = 134$
- $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (y_C - y_A)^2$
  $= (-2)^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9$
- $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (y_C - y_B)^2$
  $= 8^2 + 5^2 + 6^2 = 64 + 25 + 36 = 125$

On remarque l'égalité : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Correction 5

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$
     $= \big(1-(-2)\,;2-0\,;-1-1\big) = (3\,;2\,;-2)$
   - $\overrightarrow{AC} = \big(-2-(-2)\,;2-0\,;2-1\big) = (0\,;2\,;1)$

   On a le produit scalaire suivant :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times0 + 2\times2 + (-2)\times1 = 0 + 4 - 2 = 2$

   On a les longueurs suivantes :
   - $AB = \sqrt{\big(x_B - x_A\big)^2 + \big(y_B - y_A\big)^2 + \big(z_B - z_A\big)^2}$
     $= \sqrt{\big(1-(-2)\big)^2 + \big(2-0\big)^2 + \big(-1-1\big)^2}$
     $= \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$
   - $AC = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$
2. On a la définition suivante du produit scalaire :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big)$$
   $$2 = \sqrt{17}\times\sqrt{5}\times\cos\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big)$$
   $$\cos\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big) = \frac{2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}$$
   A l'aide des relations trigonométriques inverses :
   $$\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big) = \cos^{-1}\Big(\frac{2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}\Big)$$
   $$\approx\ 77{,}47$$
   Ainsi, au degré près, on a la mesure suivante :
   $\widehat{BAC} = 77^o$
3. La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas un angle plat ; on en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Correction 6

Déterminons les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{EF}\,(x_F - x_E\,;y_F - y_E\,;z_F - z_E)$
  $= \big(1-2\,;-1-1\,;2-(-3)\big) = (-1\,;-2\,;5)$
- $\overrightarrow{EG}\,(x_G - x_E\,;y_G - y_E\,;z_G - z_E)$
  $= \big(-1-2\,;3-1\,;1-(-3)\big) = (-3\,;2\,;4)$

On a les deux distances suivantes :

- $EF = \sqrt{\big(x_F - x_E\big)^2 + \big(y_F - y_E\big)^2 + \big(z_F - z_E\big)^2}$
  $= \sqrt{\big(-1\big)^2 + \big(-2\big)^2 + 5^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$
- $EG = \sqrt{\big(x_G - x_E\big)^2 + \big(y_G - y_E\big)^2 + \big(z_G - z_E\big)^2}$
  $= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ peut s'exprimer de deux façons :

- $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = -1\times(-3) + (-2)\times2 + 5\times4 = 3 - 4 + 20 = 19$
- $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = EF\times EG\times\cos\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big)$
  $= \sqrt{30}\times\sqrt{29}\times\cos\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big)$

En identifiant les deux résultats obtenus pour le produit scalaire de ces vecteurs, on obtient :
$$19 = \sqrt{30}\cdot\sqrt{29}\cdot\cos\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big)$$
$$\cos\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big) = \frac{19}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{29}}$$
$$\cos\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big) \approx 0{,}6442$$
$$\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big) \approx \cos^{-1}\big(0{,}6442\big)$$
$$\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big) \approx 49{,}897^o$$
$$\big(\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{EG}\big) \approx 50^o$$
L'affirmation est donc vraie.

Correction 7

Déterminons les coordonnées des deux vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$
  $= (1{-}1\,;1{-}0\,;1{-}0) = (0\,;1\,;1)$
- $\overrightarrow{AC}\,(y_C - y_A\,;y_C - y_A\,;z_C - z_A)$
  $= (7{-}1\,;2{-}0\,;-1{-}0) = (6\,;2\,;-1)$

La comparaison des abscisses de ces deux vecteurs permet de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires entre eux.

Effectuons les deux produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u} = 0\times(-1) + 1\times2 + 1\times(-2) = 0 + 2 - 2 = 0$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u} = 6\times(-1) + 2\times2 + (-1)\times(-2)$
  $-6 + 4 + 2 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan (ABC), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan (ABC).

Correction 8

1. On a les coordonnées des deux vecteurs suivantes :
   - $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$
     $= \big(7{-}1\,;-1{-}(-1)\,;-2{-}4\big) = (6\,;0\,;-6)$
   - $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A\,;y_C - y_A\,;z_C - z_A)$
     $= \big(1{-}1\,;5{-}(-1)\,;-2{-}4\big) = (0\,;6\,;-6)$

   On remarque facilement que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non-colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un plan.
2. Pour montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan, il suffit de montrer que ce vecteur est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
   - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = 6\times1 + 0\times1 + (-6)\times1 = 6 + 0 - 6 = 0$

- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=0\times1+6\times1+(-6)\times1=0+6-6=0$

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant un vecteur orthogonal au plan (ABC), on en déduit que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne, l'équation suivante :

$$x+y+z+d=0 \qquad \text{où } d\in\mathbb{R}$$

Le point A appartenant au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de ce plan :

$$\begin{aligned} x_A+y_A+z_A+d&=0\\ 1+(-1)+4+d&=0\\ 4+d&=0\\ d&=-4\end{aligned}$$

Le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :
$x+y+z-4=0$

Correction 9

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu I du segment $[AB]$.

Les coordonnées du point I sont données par la formule :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2+(-1)}{2}\,;\,\frac{(-3)+1}{2}\,;\,\frac{(-1)+0}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{-2}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$
$=\big(-1-2\,;1-(-3)\,;0-(-1)\big)=\big(-3\,;1+3\,;1\big)=\big(-3\,;4\,;1\big)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan médiateur du segment $[AB]$; l'équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$-3\cdot x+4\cdot y+z+d=0 \qquad \text{où } d\in\mathbb{R}$$

Le point I appartenant à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation de ce plan :

$$\begin{aligned} -3\cdot x_I+4\cdot y_I+z_I+d&=0\\ -3\times\frac{1}{2}+4\times(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)+d&=0\\ -\frac{3}{2}-4-\frac{1}{2}+d&=0\\ -2-4+d&=0\\ -6+d&=0\\ d&=6\end{aligned}$$

Ainsi, le plan médiateur du segment $[AB]$ admet pour expression :
$-3\cdot x+4\cdot y+z+6=0$

Correction 10

1. Déterminons les coordonnées des deux vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$
$=\big(3-1\,;-1-1\,;2-(-2)\big)=\big(2\,;-2\,;2+2\big)=\big(2\,;-2\,;4\big)$
- $\overrightarrow{AC}\,(x_C-x_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A)$
$=\big(0-1\,;2-1\,;1-(-2)\big)=\big(-1\,;1\,;1+2\big)=\big(-1\,;1\,;3\big)$

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2=k\times(-1)\\ -2=k\times1\\ 4=k\times3\end{cases}$$

Ce système n'admettant pas de solution, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C définissent un plan.

2. Considérons $\overrightarrow{u}\,(x\,;y\,;z)$ normal au plan (ABC). Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ doit être orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On en déduit les deux équations suivantes :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}=0 \quad\Big|\quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u}=0$$
$$2x-2y+4z=0 \quad\Big|\quad -x+y+3z=0$$

Ainsi, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ doivent vérifier le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x-2y+4z=0\\ -x+y+3z=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 2x-2y+4z=0\\ -2x+2y+6z=0\end{cases}$$

Par addition membre à membre des deux équations, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned}10z&=0\\ z&=0\end{aligned}$$

Le système d'équation devient :

$$\begin{cases} 2x-2y=0\\ -x+y=0\end{cases}$$

La seconde équation permet d'obtenir l'expression de x en fonction de y :

$$\begin{aligned}-x+y&=0\\ -x&=-y\\ x&=y\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{u}\,(x\,;x\,;0)$

En prenant $x=1$, on obtient un vecteur $\overrightarrow{u}$ normal au plan (ABC) et à coordonnées entières :
$\overrightarrow{u}\,\big(1\,;1\,;0\big)$

3. Le vecteur $\overrightarrow{u}\,\big(1\,;1\,;0\big)$ étant normal au plan (ABC), ce plan admet pour équation cartésienne :

$$x+y+d=0 \quad \text{où } d\in\mathbb{R}$$

Le point D appartenant au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$\begin{aligned} x_D+y_D+d&=0\\ 1+1+d&=0\\ 2+d&=0\\ d&=-2\end{aligned}$$

Le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :
$x+y-2=0$

Correction 11

On a :

$$\begin{cases} x+2y-z=-2\\ 3x+y+2z=-1\\ x-y+3z=3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 3x+6y-3z=-6\\ 3x+y+2z=-1\\ 3x-3y+9z=9\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 3x+6y-3z=-6\\ 5y-5z=-5\\ 9y-12z=-15\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 3x+6y-3z=-6\\ 45y-45z=-45\\ 45y-60z=-75\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+\ 6y-\ 3z &=& -6 \\ 45y-45z &=& -45 \\ 15z &=& 30 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+\ 6y-\ 3z &=& -6 \\ 45y-45z &=& -45 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+\ 6y-3z &=& -6 \\ 45y-90 &=& -45 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+\ 6y-3z &=& -6 \\ 45y\qquad &=& 45 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x + 6y - 3z &=& -6 \\ y\qquad\quad &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x + 6 - 6 &=& -6 \\ y\qquad &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x\qquad\quad &=& -6 \\ y\quad &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x\qquad\quad &=& -2 \\ y\quad &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

Correction 12

On a :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x + y - z &=& 1 \\ x - y + 2z &=& 2 \\ -x + 5y - 9z &=& -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x + y - z &=& 1 \\ 3x - 3y + 6z &=& 6 \\ 3x - 15y + 27z &=& 15 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+\ y-\ z &=& 1 \\ 4y-\ 7z &=& -5 \\ 16y-28z &=& -14 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x+\ y-\ z &=& 1 \\ 16y-28z &=& -20 \\ 16y-28z &=& -14 \end{array}\right.$$

Par addition des deux dernières équations, on obtient :

$0y - 0z = -6$

Cette équation ne peut avoir de solution.