Calcul Intégral - Terminale spé maths

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-3}^{2} x+1\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_{0}^{5} (2x-5)^2\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{1} (1-x)^3\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x}{(2\cdot x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_{4}^{6} \frac{2\cdot x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$ f. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2*

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\cdot(2\cdot x^3+2)^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 3*

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$h(x)=x\cdot\ln x-x$

1. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire dont la surface est délimitée par :
   - l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_h$ représentative de la fonction h ;
   - les droites d'équations : $x=1$; $x=2$

Exercice 4*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

1. Démontrer que, pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

2. On définit le nombre : $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que : $I=\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$
   Donner une interprétation graphique de I.

Exercice 5

On considère les deux intégrales suivantes :
$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$; $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

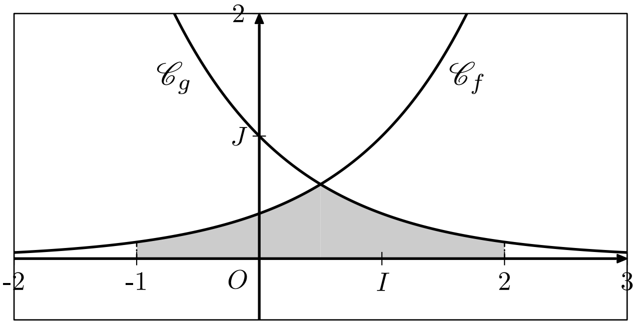
1. Justifier l'égalité : $I+J=1$.

2. a. Déterminer la valeur de l'intégrale I.

   b. En déduire la valeur de l'intégrale J.

Exercice 6*

On considère les deux fonctions f et g définies par :
$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}$; $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$
Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.



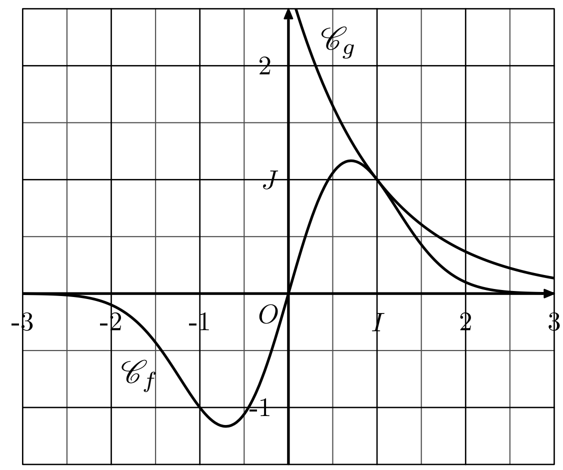
Le domaine grisé ci-dessus est défini par :
- il est situé entre les droites d'équations $x=-1$ et $x=2$.
- il est situé au dessus de l'axe des abscisses.
- il est situé sous les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Déterminer l'aire de ce domaine.

Exercice 7

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :
$f(x)=x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}$
et la fonction g définie pour tout réel x par :
$g(x)=\mathrm{e}^{1-x}$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentativees $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



On admet que, sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x}-x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x)=\dfrac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\ln 7]$.

