Correction 1

a. La fonction f définit par :
$f(x)=x+1$
qui admet pour primitive la fonction F dont l'expression est :
$F(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+x$
Ainsi, on a le calcul intégral suivant :
$$\int_{-3}^{2} x+1\,\mathrm{d}x=\Big[\frac{1}{2}\cdot x^2+x\Big]_{-3}^{2}$$
$$=\Big(\frac{1}{2}\times 2^2+2\Big)-\Big[\frac{1}{2}\times(-3)^2+(-3)\Big]$$
$$=\frac{4}{2}+2-\frac{9}{2}+3=\frac{5}{2}$$

b. Considérons la fonction u est définie par :
$u(x)=2\cdot x-5\quad;\quad u'(x)=2$
Considérons la fonction g définie par :
$g(x)=(2x-5)^2$
qui admet pour expression :
$$=\frac{1}{2}\times 2\cdot(2x-5)^2=\frac{1}{2}\times u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^2$$
La fonction g admet pour primitive la fonction G définie par :
$$G(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\big[u(x)\big]^3=\frac{1}{6}\cdot(2x-5)^3$$
On a le calcul intégral suivant :
$$\int_0^5 \big(2\cdot x-5\big)\,\mathrm{d}x=\Big[\frac{1}{6}\cdot\big(2\cdot x-5\big)^3\Big]_0^5$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\big(2\times 5-5\big)^3-\frac{1}{6}\cdot\big(2\times 0-5\big)^3$$
$$=\frac{1}{6}\times 5^3+\frac{1}{6}\times 5^3=\frac{2}{6}\times 125=\frac{125}{3}$$

c. Considérons la fonction u est définie par :
$u(x)=1-x\quad;\quad u'(x)=-1$
Considérons la fonction h définie par :
$$h(x)=(1-x)^3=-1\times(-1)\cdot(1-x)^3$$
$$=-1\times u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^3$$
La fonction h admet pour primitive la fonction H définie par :
$$H(x)=-1\times\frac{1}{4}\cdot\big[u(x)\big]^4=-\frac{1}{4}\cdot(1-x)^4$$
On a le calcul intégral suivant :
$$\int_{-3}^{1}\big(1-x\big)^3\,\mathrm{d}x=\Big[-\frac{1}{4}\cdot\big(1-x\big)^4\Big]_{-3}^{1}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\big(1-1\big)^4-\Big[-\frac{1}{4}\cdot\big[1-(-3)\big]^4\Big]$$
$$=-\frac{1}{4}\times 0^4+\frac{1}{4}\times 4^4=4^3=64$$

d. Soit u la fonction définie par :
$u(x)=2\cdot x^2+1\quad;\quad u'(x)=4\cdot x$
Considérons la fonction j définie par :
$$j(x)=\frac{x}{(2x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$$
La fonction j admet pour primitive la fonction J définie par :
$$J(x)=\frac{1}{4}\times\Big(-\frac{1}{2x^2+1}\Big)=-\frac{1}{4\cdot(2x^2+1)}$$
Ainsi, on peut écrire :
$$\int_1^4\frac{x}{\big(2\cdot x^2+1\big)^2}\,\mathrm{d}x=\Big[-\frac{1}{4\cdot(2\cdot x^2+1)}\Big]_1^4$$
$$=-\frac{1}{4\cdot(2\times 4^2+1)}-\Big[-\frac{1}{4\cdot(2\times 1^2+1)}\Big]=-\frac{1}{4\times 33}+\frac{1}{4\times 3}$$
$$=\frac{-1+1\times 11}{4\times 33}=\frac{10}{132}$$

e. Notons u la fonction définie par :
$u(x)=x^2-3\quad;\quad u'(x)=2\cdot x$
Considérons la fonction k définie par :
$$k(x)=\frac{2\cdot x}{x^2-3}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$
La fonction k admet pour primitive la fonction K définie par :
$K(x)=\ln\big[u(x)\big]=\ln(x^2-3)$
Ainsi, on le calcul intégral suivant :
$$\int_4^6\frac{2\cdot x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x=\big[\ln(x^2-3)\big]_4^6=\ln(6^2-3)-\ln(4^2-3)$$
$$=\ln(33)-\ln(13)=\ln\Big(\frac{33}{13}\Big)$$

f. Considérons la fonction L définie par :
$$L(x)=-\frac{1}{x}-\ln x$$
qui admet pour dérivée :
$$L'(x)=-\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$
Ainsi, on a le calcul intégral suivant :
$$\int_1^3\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\Big[-\frac{1}{x}-\ln x\Big]_1^3$$
$$=\Big(-\frac{1}{3}-\ln 3\Big)-\Big(-\frac{1}{1}-\ln 1\Big)$$
$$=-\frac{1}{3}-\ln 3+\frac{1}{1}+\ln 1=\frac{2}{3}-\ln 3$$

Correction 2

a. Considérons la fonction f définie par :
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x$$
En notant u la fonction logarithme, on a :
$f(x)=u'(x)\cdot u(x)$
La fonction f admet pour primitive la fonction F définie par :
$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\big[u(x)\big]^2=\frac{1}{2}\cdot(\ln x)^2=\frac{(\ln x)^2}{2}$$
On a le calcul intégral suivant :
$$\int_4^5\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\Big[\frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_4^5=\frac{(\ln 5)^2}{2}-\frac{(\ln 4)^2}{2}$$
$$=\frac{(\ln 5)^2}{2}-\frac{(\ln 2^2)^2}{2}=\frac{(\ln 5)^2}{2}-\frac{2\ln 2}{2}$$
$$=\frac{(\ln 5)^2}{2}-4(\ln 2)^2$$

b. Notons u la fonction définie par :
$u(x)=x+3\quad;\quad u'(x)=1$
Considérons la fonction g définie par :
$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$$
qui admet pour expression :
$$=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

Ainsi, on a le calcul intégral :
$$\int_{-2}^{4}\frac{1}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x=\Big[2\cdot\sqrt{x+3}\Big]_{-2}^{4}$$
$$=2\cdot\sqrt{4+3}-2\cdot\sqrt{-2+3}=2\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{1}=2\cdot\sqrt{7}-2$$

c. En notant u la fonction définie par :
$u(x)=x+4\quad;\quad u'(x)=1$
Considérons la fonction h définie par :
$$h(x)=\frac{1}{x+4}$$
qui admet pour expression :
$$=\frac{u'(x)}{u(x)}$$
La fonction h admet pour primitive la fonction H définie par :
$H(x)=\ln\big[u(x)\big]=\ln\big(x{+}4\big)$
On a le calcul intérgral suivant :
$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x=\big[\ln u(x)\big]_{-1}^{3}=\big[\ln(x{+}4)\big]_{-1}^{3}$$
$$=\ln(3{+}4)-\ln(-1{+}4)=\ln(7)-\ln(3)=\ln\frac{7}{3}$$

d. Considérons la fonction u définie par :
$u(x)=2x^3+2\quad;\quad u'(x)=6x^2$
Considérons la fonction j définie par :
$$j(x)=x^2\cdot\big(2x^3+2\big)^2$$
qui admet pour expression :
$$=\frac{1}{6}\times6x^2\cdot\big(2x^3+2\big)^2=\frac{1}{6}\times u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^2$$
La fonction j admet pour primitive la fonction J définie par :
$$J(x)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\big[u(x)\big]^3=\frac{1}{18}\big(2x^3+2\big)^3$$
Ainsi, on a le calcul intégral :
$$\int_{-1}^{1}x^2\cdot(2x^3+2)^2\,\mathrm{d}x=\Big[\frac{1}{18}\big(2x^3+2\big)^3\Big]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{18}\big(2\times1^3+2\big)^3-\frac{1}{18}\big[2\times(-1)^3+2\big]^3=\frac{64}{18}-\frac{1}{18}\times0$$
$$=\frac{64}{18}=\frac{32}{9}$$

Correction 3

1. Déterminons l'expression de la dérivée de la fonction h.
La fonction h s'écrit sous la forme :
$h(x)=u(x)\cdot v(x)-x$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x)=x\quad;\quad v(x)=\ln x$
et qui admettent pour dérivée :
$$u'(x)=1\quad;\quad v'(x)=\frac{1}{x}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée h' :
$$h'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)-1$$
$$=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$$
La dérivée de la fonction h étant la fonction logarithme, on en déduit que la fonction h est un primitive du logarithme népérien.

2. Sur l'intervalle $\big[1\,;2\big]$, la fonction logarithme népérien est positive. Ainsi, l'aire demandée correspond à la valeur de l'intégrale suivante :
$$\int_{1}^{2}\ln x\,\mathrm{d}x=\big[h(x)\big]_{1}^{2}=h(2)-h(1)$$
$$=\big(2\cdot\ln2-2\big)-\big(1\cdot\ln1-1\big)$$
$$=2\cdot\ln2-2-1\times0-1=2\cdot\ln2-3$$

Correction 4

1. On a les transformations algébriques :
$$f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1\times\mathrm{e}^{x}}{\big(1+\mathrm{e}^{-x}\big)\times\mathrm{e}^{x}}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{0}}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

2. L'expression de la fonction f peut s'écrire :
$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$u(x)=\mathrm{e}^{x}+1\quad;\quad u'(x)=\mathrm{e}^{x}$
Ainsi, la fonction f admet pour primitive la fonction F dont l'expression est :
$F(x)=\ln\big[u(x)\big]=\ln\big(\mathrm{e}^{x}{+}1\big)$
On en déduit le calcul intégral :
$$I=\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\big[F(x)\big]_{0}^{1}=\ln\big(\mathrm{e}^{1}{+}1\big)-\ln\big(\mathrm{e}^{0}{+}1\big)$$
$$=\ln\big(e{+}1\big)-\ln(1{+}1)=\ln\big(e{+}1\big)-\ln(2)=\ln\Big(\frac{e{+}1}{2}\Big)$$
La fonction f étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le calcul intégral I correspond à l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f de l'axe des abscisses et des deux droites d'équations $x{=}0$ et $x{=}1$.

Correction 5

1. Effectuons le calcul de cette somme :
$$I+J=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x$$
En utilisant la linéarité de l'intégrale :
$$=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x$$
$$=y\int_{0}^{1}1\,\mathrm{d}x=\big[x\big]_{0}^{1}=1-0=1$$

2. a. Considérons la fonction u définie par :
$u(x)=\mathrm{e}^{x}+1\quad;\quad u'(x)=\mathrm{e}^{x}$
Ainsi, on obtient le calcul intégral suivant :
$$I=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\Big[\ln\big[u(x)\big]\Big]_{0}^{1}$$
$$=\big[\ln(\mathrm{e}^{x}{+}1)\big]_{0}^{1}=\ln(\mathrm{e}^{1}{+}1)-\ln(\mathrm{e}^{0}{+}1)$$
$$=\ln\big(e{+}1\big)-\ln2=\ln\frac{e{+}1}{2}$$

b. On en déduit la valeur de l'intégrale J :
$I+J=1$
$$J=1-I=1-\ln\frac{e{+}1}{2}$$

Correction 6

Déterminons l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
\mathrm{e}^{x-1} &= \mathrm{e}^{-x}\\
\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{-x}} &= 1\\
\mathrm{e}^{x-1-(-x)} &= 1\\
\mathrm{e}^{2x-1} &= 1\\
\ln\left(\mathrm{e}^{2x-1}\right) &= \ln\left(1\right)\\
2x-1 &= 0\\
2x &= 1\\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Considérons les deux fonctions F et G définies par :

$F(x) = \mathrm{e}^{x-1} \quad ; \quad G(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

- $F'(x) = \mathrm{e}^{x-1}$
- $G'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}$

Ainsi, les fonctions F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g.

On décompose le domaine considéré en deux sous-domaines :

- Le domaine $\mathcal{D}_1$ est défini par :
  - la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe des abscisses
  - les droites d'équations $x=-1$ et $x=\dfrac{1}{2}$

  L'aire de ce domaine est définie par :

  $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-1\right)$

  $= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}-1} - \mathrm{e}^{-1-1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-2}$

- Le domaine $\mathcal{D}_2$ est défini par :
  - la courbe $\mathscr{C}_g$ et la courbe des abscisses
  - les droites d'équations $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=2$

  L'aire de ce domaine est définie par :

  $\mathcal{A}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = G\left(2\right) - G\left(\frac{1}{2}\right)$

  $= \left(-\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-2}$

On en déduit l'aire du domaine considérée :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-2}\right) + \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-2}\right)$

$= 2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 2\cdot\mathrm{e}^{-2}$

Correction 7

1. Considérons la fonction F définie par :

   $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}$

   L'expression de la fonction F est donnée sous la forme :

   $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{u(x)}$

   où la fonction u est définie par :

   $u(x) = 1 - x^2 \quad ; \quad u'(x) = -2\cdot x$

   La formule de érivation de la composée d'une fonction par la fonction exponentielle donne :

   $F'(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(-2\cdot x\right)\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}$

   $= x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2} = f(x)$

   On vient d'établir que la fonction F est une primitive de la fonction f.

2. On a le calcul intégral :

$$\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \left[F(1) - F(0)\right]$$

$$= -\mathrm{e}^{1-1} + \mathrm{e}^{1-0} + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{1-1^2} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{1-0^2}$$

$$= -\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 + \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^0 - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^1 = -1 + e + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot e = \frac{1}{2}\cdot e - \frac{1}{2}$$

3. D'après l'énoncé, la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

   Considérons le domaine $\mathcal{D}$ définie par :

   - il se situe entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
   - il se situe entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

   Ainsi, l'aire de $\mathcal{D}$ se calcule par :

   $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \displaystyle\int_0^1 g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$

   $= \displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot e - \frac{1}{2}$

Correction 8

1. On considère la fonctions u définie par :

   $u(x) = \mathrm{e}^x + 7$

   qui admet pour dérivée :

   $u'(x) = \mathrm{e}^x$

   Ainsi, l'expression de la fonction f admet pour écriture :

   $f(x) = \dfrac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 7} = 4\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

   La fonction f admet pour primitive la fonction F dont l'expression est :

   $F(x) = 4\cdot\ln\left(\mathrm{e}^x{+}7\right)$

2. Ainsi, la fonction f admet pour valeur moyenne sur l'intervalle $\left[0\,;\ln 7\right]$:

$$\frac{1}{\ln 7 - 0}\cdot\int_0^{\ln 7} f(x) = \frac{1}{\ln 7}\cdot\Big[F(x)\Big]_0^{\ln 7} = \frac{1}{\ln 7}\cdot\Big[4\cdot\ln\left(\mathrm{e}^x{+}7\right)\Big]_0^{\ln 7}$$

$$= \frac{4}{\ln 7}\cdot\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\ln 7}{+}7\right) - \ln\left(\mathrm{e}^0{+}7\right)\right]$$

$$= \frac{4}{\ln 7}\cdot\left[\ln\left(7{+}7\right) - \ln 8\right] = \frac{4}{\ln 7}\cdot\left(\ln 14 - \ln 8\right)$$

$$= \frac{4}{\ln 7}\cdot\ln\frac{14}{8} = \frac{4\cdot\ln\frac{14}{8}}{\ln 7} = \frac{4\cdot\ln\frac{7}{4}}{\ln 7}$$

