Correction 1

a. $x^2+2x-3=\left[(x+1)^2-1\right]-3=(x+1)^2-4$

b. $x^2-6x-2=\left[(x-3)^2-9\right]-2=(x-3)^2-11$

c. $x^2+12x+5=\left[(x+6)^2-36\right]+5=(x+6)^2-31$

d. $x^2-10x+5=\left[(x-5)^2-25\right]+5=(x-5)^2-20$

Correction 2

1. On a les transformations algébriques :
$2x^2+4x-16=2\cdot(x^2+2x)-16$

On remarque que l'expression x^2+2x est le début du développement de l'identité remarquable $(x+1)^2$.
Cette remarque permet d'effectuer l'identification :
$(x+1)^2=x^2+2\cdot x+1 \implies x^2+2\cdot x=(x+1)^2-1$

On obtient ainsi, la forme canonique recherchée :
$2x^2+4x-16=2\cdot(x^2+2x)-16=2\cdot\left[(x+1)^2-1\right]-16$
$=2\cdot(x+1)^2-2-16=2\cdot(x+1)^2-18$

2. Résolvons l'équation (E) :

$$2x^2+4x+4=20$$
$$2x^2+4x+4-20=0$$
$$2x^2+4x-16=0$$

D'après la question précédente, on a :

$$2\cdot(x+1)^2-18=0$$
$$\frac{2\cdot(x+1)^2-18}{2}=\frac{0}{2}$$
$$(x+1)^2-\frac{18}{2}=0$$
$$(x+1)^2-9=0$$
$$(x+1)^2-3^2=0$$
$$\left[(x+1)+3\right]\left[(x+1)-3\right]=0$$
$$(x+4)(x-2)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x+4=0$	$x-2=0$
$x=-4$	$x=2$

On en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation sont :
$\mathcal{S}=\{-4\,;\,2\}$.

Correction 3

a. $2x^2+12x-4=2\cdot(x^2+6x)-4$
$=2\cdot\left[(x^2+6x+9)-9\right]-4=2\cdot\left[(x+3)^2-9\right]-4$
$=2\cdot(x+3)^2-18-4=2\cdot(x+3)^2-22$

b. $3x^2+30x+12=3\cdot(x^2+10x)+12$
$=3\cdot\left[(x^2+10x+25)-25\right]+12=3\cdot\left[(x+5)^2-25\right]+12$
$=3\cdot(x+5)^2-75+12=3\cdot(x+5)^2-63$

Correction 4

1. Les factorisations suivantes s'établissent à l'aide des identités remarquables :

a. $4x^2-81=(2x)^2-9^2=(2x+9)(2x-9)$

b. $x^2-5=x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

c. $(2x-4)^2-9=(2x-4)^2-3^2$
$=(2x-4+3)(2x-4-3)=(2x-1)(2x-7)$

d. $x^2-6\cdot x+9=x^2-2\times x\times 3+3^2=(x-3)^2$

2. Effectuons un raisonnement par l'absurde :
Supposons que cette expression se factorise en produit de deux facteurs du premier degré.

On a alors l'existence de nombres réels α, β, γ, δ vérifiant l'égalité suivante :
$x^2+1=(\alpha\cdot x+\beta)(\gamma\cdot x+\delta)$

La contradiction arrive sur les deux raisonnements suivant :

- Cette égalité montre que l'expression x^2+1 s'annule pour les deux valeurs $-\frac{\beta}{\alpha}$ et $-\frac{\delta}{\gamma}$ de x.
- Or, cette expression est minorée par 1 :
$x^2\geqslant 0$
$x^2+1\geqslant 1$

On vient donc de montrer qu'elle s'annulait mais qu'elle ne pouvait pas s'annuler. Cette contradiction montre que l'hypothèse de départ est fausse.

Correction 5

a. Le discriminant du polynome $x^2+2x-15$ est :
$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-15)=64$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

Le discriminant est strictement positif ; ce polynôme admet les deux racines :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$=\dfrac{-2-8}{2}$	$=\dfrac{-2+8}{2}$
$=-5$	$=3$

b. Le discriminant du polynome $3x^2-5x+7$ est :
$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times3\times7=25-84=-59$

Le discriminant étant strictement négatif, le polynôme $3x^2-5x+7$ n'admet aucune racine.

c. Le discriminant du polynome $3x^2-24x+48$ est :
$\Delta=b^2-4ac=(-24)^2-4\times3\times48=576-576=0$

Le discriminant étant nul, le polynôme $3x^2-24x+48$ admet une unique racine.
$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-24}{2\times3}=4$

d. Le discriminant du polynome $-4\cdot x^2-x+3$ est :
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-4)\times3=1+48=49$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme $-4\cdot x^2-x+3$ admet pour racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-7}{2\times(-4)} = \frac{1-7}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+7}{2\times(-4)} = \frac{1+7}{-8} = \frac{8}{-8} = -1$$

Correction 6

On a les transformations algébriques :

$$\begin{aligned} x(x-2)(x+1) &= (x-2)(-7-3x) \\ x(x-2)(x+1)-(x-2)(-7-3x) &= 0 \\ (x-2)\big[x(x+1)-(-7-3x)\big] &= 0 \\ (x-2)\big(x^2+x+7+3x\big) &= 0 \\ (x-2)\big(x^2+4x+7\big) &= 0 \end{aligned}$$

Cherchons les racines du second facteur ; le discriminant de x^2+4x+7 a pour valeur :

$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times1\times7 = 16-28 = -12 < 0$

Ce discriminant est négatif : ce polynôme n'admet aucune racine.

Pour que le produit $(x-2)\big(x^2+4x+7\big)$ s'annule, il est nécessaire qu'un de ses facteurs s'annule ; seul le premier facteur peut s'annuler pour $x=2$.

L'ensemble des solutions est : $S=\{2\}$

Correction 7

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$2\cdot\big(x-3\big)\big(x-1\big) = \big(2\cdot x-6\big)\big(x-1\big)$

$= 2\cdot x^2-2\cdot x-6\cdot x+6 = 2\cdot x^2-8\cdot x+6 = f(x)$

b. Utilisons la forme factorisée :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2\cdot\big(x-3\big)\big(x-1\big) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2=0$	$x-3=0$	$x-1=0$
Impossible	$x=3$	$x=1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{1\,;3\}$

c. De la forme factorisée, on en déduit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2\cdot(x-3)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S}=\big[1\,;3\big]$.

2. a. • $f(x)+2 = \big(2\cdot x^2-8\cdot x+6\big)+2 = 2\cdot x^2-8\cdot x+8$

• $2\big(x-2\big)^2 = 2\big(x^2-4\cdot x+4\big) = 2\cdot x^2-8\cdot x+8$

On en déduit l'identité : $f(x)+2=2\big(x-2\big)^2$

b. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} \big(x-2\big)^2 &\geqslant 0 \\ 2\cdot\big(x-2\big)^2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f(x)+2 &\geqslant 0 \\ f(x) &\geqslant -2 \end{aligned}$$

