Exercice 1*

La suite (u_n) est définit par $u_0=13$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0<u_n\leqslant 2$.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démonter que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$:
$$u_n \geqslant 0.$$
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 5$:
$$u_n \geqslant n-3$$
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. a. Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :
$$u_n > n^2$$
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

