Correction 1

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a les deux valeurs suivantes :
  $u_0 = 13 \quad ; \quad 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + \frac{12}{1} = 1 + 12 = 13$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$
  La définition de la suite (u_n) permet d'obtenir l'expression du terme de rang $(n+1)$:
  $$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\cdot\Big(1 + \frac{12}{5^n}\Big) + \frac{4}{5}$$
  $$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5^n} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et qu'elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. On a l'encadrement $0 < \frac{1}{5} < 1$. On en déduit la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{1}{5}\Big)^n = 0$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 1 + \frac{12}{5^n} = \lim_{n\mapsto+\infty} 1 + 12\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n$$
$$= 1 + 12\times 0 = 1$$

Correction 2

1. Considérons pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n \leqslant 7$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a : $u_0 = 5 \leqslant 7$
  La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $u_n \leqslant 7$
  Partons de la comparaison suivante :
  $$u_n \leqslant 7$$
  $$\frac{1}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{7}{3}$$
  $$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \leqslant \frac{7}{3} + 4$$
  $$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3}$$
  $$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3} \leqslant 7$$
  $$u_{n+1} \leqslant 7$$
  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

2. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{Q}_n$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  Le terme de rang 1 a pour valeur :
  $u_1 = \frac{1}{3}\times 5 + 4 = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$
  On a la comparaison :
  $$5 < \frac{17}{3}$$
  $$u_0 < u_1$$
  Ainsi, la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vérifiée.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $u_n \leqslant u_{n+1}$
  Partons de la comparaison :
  $$u_n < u_{n+1}$$
  $$\frac{1}{3}\cdot u_n < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1}$$
  $$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1} + 4$$
  $$u_{n+1} < u_{n+2}$$
  On vient détablir la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 3

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$0 < u_n \leqslant 2$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que cette propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel

n.

- **Initialisation :**
De l'encadrement $0<1\leqslant 2$, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
$$0<\quad u_n\quad \leqslant 2$$
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$\begin{aligned} 0< \quad & 2{\cdot}u_n \leqslant 4 \\ \sqrt{0}< & \sqrt{2{\cdot}u_n} \leqslant \sqrt{4} \\ 0< \quad & u_{n+1} \leqslant 2 \end{aligned}$$
On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n{+}1$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Etudions le signe de la différence suivante :
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n}-u_n$$
Le facteur $\sqrt{2u_n}{+}u_n$ est strictement postif :
$$=\frac{\big(\sqrt{2u_n}-u_n\big)\big(\sqrt{2u_n}+u_n\big)}{\sqrt{2u_n}+u_n}$$
$$=\frac{\big(\sqrt{2u_n}\big)^2-\big(u_n\big)^2}{\sqrt{2u_n}+u_n}=\frac{2u_n-u_n^2}{\sqrt{2u_n}+u_n}=\frac{u_n{\cdot}(2-u_n)}{\sqrt{2u_n}+u_n}$$
De l'encadrement obtenu à la question 1., on a :

$u_n>0$	$u_n\leqslant 2$	$\sqrt{2{\cdot}u_n}{+}u_n>0$
	$-u_n\geqslant -2$	
	$2-u_n\geqslant 2-2$	
	$2-u_n\geqslant 0$	

Ainsi, la différence de deux termes consécutifs de la suite $\big(u_n\big)$ a pour signe :
$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n{\cdot}(2-u_n)}{\sqrt{2u_n}+u_n}>0$$
On en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

> **Autre démonstration :** étudier le signe de $u_{n+1}{-}u_n$ via la transformation algébrique :
> $$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2{\cdot}u_n}-u_n=\sqrt{2}{\cdot}\sqrt{u_n}-\big(\sqrt{u_n}\big)^2$$
> $$=\sqrt{u_n}{\cdot}\big(\sqrt{2}-\sqrt{u_n}\big)$$

3. La suite $\big(u_n\big)$ est croissante et majorée par 2.
D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est convergente.

Correction 4

1. Voici les quatre premiers termes de cette suite :
- $u_0=1$
- $u_1=\dfrac{1}{3}{\cdot}u_0+0-2=\dfrac{1}{3}\times 1+0-2=\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{5}{3}$
- $u_2=\dfrac{1}{3}{\cdot}u_1+1-2=\dfrac{1}{3}{\cdot}\Big(-\dfrac{5}{3}\Big)+1-2=-\dfrac{5}{9}-1=-\dfrac{14}{9}$
- $u_3=\dfrac{1}{3}{\cdot}u_2+1-2=\dfrac{1}{3}{\cdot}\Big(-\dfrac{14}{9}\Big)+2-2=-\dfrac{14}{27}$

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n\geqslant 0$"
Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel supérieur ou égal 4, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation :**
Le terme de rang 4 a pour valeur :
$$u_4=\frac{1}{3}{\cdot}u_3+3-2=\frac{1}{3}{\cdot}\Big(-\frac{14}{27}\Big)+1$$
$$=-\frac{14}{81}+1=-\frac{14}{81}+\frac{81}{81}=\frac{67}{81}\geqslant 0$$
La propriété $\mathcal{P}_4$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel quelconque ; c'est à dire qu'on a pour hypothèse par récurrence :
$u_n\geqslant 0$
Par définition des termes de la suite $\big(u_n\big)$:
$$u_{n+1}=\frac{1}{3}{\cdot}u_n+n-2$$
Le rang n étant supérieur à 4 :
$$\geqslant\frac{1}{3}{\cdot}u_n+4-2$$
$$\geqslant\frac{1}{3}{\cdot}u_n+2$$
Au rang n, on a $u_n\geqslant 0$
$$\geqslant\frac{1}{3}\times 0+2$$
$$\geqslant 2\geqslant 0$$
La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $(n{+}1)$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5 ; on en déduit que $(n{-}1)$ est supérieur ou égal à 4.
On a l'égalité :
$$u_n=\frac{1}{3}{\cdot}u_{n-1}+(n-1)-2=\frac{1}{3}{\cdot}u_{n-1}+n-3$$
Puisque $n{-}1\geqslant 1$, de la question précédente :
$$\geqslant\frac{1}{3}\times 0+n-3$$
$$\geqslant n-3$$

c. On a la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n{-}3=+\infty$
A l'aide de l'inégalité obtenue à la question précédente et par les théorèmes de comparaison des suites monotones, on a :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$$

Correction 5

1. Pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1}-u_n=\big(u_n+2{\cdot}n+2\big)-u_n=2{\cdot}n+2\geqslant 0$$
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1}\geqslant u_n$

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n>n^2$"
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Inialisation :**
Pour $n=0$, on a : $u_0=2>0^2$
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$.
- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque ; c'est à dire qu'on a comme hypothèse de récurrence :
$u_n > n^2$
Par définition des termes de la suite (u_n) :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2{\cdot}n + 2 \\ &> n^2 + 2{\cdot}n + 2 \\ &> n^2 + 2{\cdot}n + 2 > n^2 + 2{\cdot}n + 1 \\ &> n^2 + 2{\cdot}n + 1 \\ &> (n+1)^2 \end{aligned}$$
On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que cette relation est vraie pour tout entier naturel n.

b. D'après la question 1., que la suite (u_n) est croissante.
De la comparaison obtenue à la question 2. a. et de la limite $\lim_{n\mapsto+\infty} n^2=+\infty$, on obtient , d'après les théorèmes de divergence des suites monotones, la limite de la suite (u_n) :
$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$

