Raisonnement par récurrence

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 5$.

EXERCICE 2

La suite (u_n) est définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$

1) Calculer u_2, u_3, u_4.
2) Que peut-on faire comme conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n ?
3) Démontrer cette conjecture par récurrence et donner la valeur exacte de u_{2021}.

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n(n+1)$.

1) Déterminer u_1, u_2, u_3 puis déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EXERCICE 4

Somme des carrés

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE 5

Somme des cubes

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 6

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6} \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant v_n \leqslant 10$

EXERCICE 7

La suite (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 \in]0\,;\,1[\\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x(2-x)$ est croissante sur $[0\,;\,1]$.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$
3) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 8

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 2$ et (u_n) croissante.

EXERCICE 9

Pour $n \geqslant 1$, on rappelle que : $n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Démontrer, par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ n! \geqslant 2^{n-1}$.

Limite d'une suite

EXERCICE 13

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{2n+5}{3n-2}$ 2) $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+5}$ 3) $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+1}{2(n+1)^2}$

EXERCICE 14

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$ 2) $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+2}$ 3) $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$

EXERCICE 15

Déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du théorème des gendarmes ou de comparaison dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$
2) $u_n = n^2 - 4(-1)^n$
3) $u_n = n + 1 - \cos n$
4) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} - 2$, $n \geqslant 2$.