Les Nombres Complexes – Tale STi2D

A) Forme algébrique d'un nombre complexe

1) Définition d'un complexe

Définition : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes ou imaginaire**, qui possède les propriétés suivantes :

- l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ soit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- l'ensemble $\mathbb{C}$ possède un élément noté i tel que $i^2 = -1$
- tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit demanière unique sous la **forme algébrique** $z = a + i\,b$ où a et b sont des nombres réels
- l'addition et lamultiplication des réels se prolongent aux nombres complexes en remplaçant i^2 par (-1)

Notations : si $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors

- $a = \Re(z)$ est la partie réelle de z
- $b = \Im(z)$ est la partie imaginaire de z

exemples :

- si $z = -2 + 3i$ alors $\Re(z) = -2$ et $\Im(z) = 3$
- si $z = 4$ alors $\Re(z) = 4$ et $\Im(z) = 0$ ainsi $z \in \mathbb{R}$
- si $z = -5i$ alors $\Re(z) = 0$ et $\Im(z) = -5$ ainsi $z \in i\mathbb{C}$

2) Addition & multiplication de nombres complexes

Propriété : Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$; alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Définition : Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$; alors $z \times z' = (a\,a' - b\,b') + i(a'b + a\,b')$

exemples :

- si $z = -2 + 3i$ et $z' = 1 - 4i$ alors $z + z' = -1 - i$
- si $z = -2 + 3i$ et $z' = 1 - 4i$ alors
  $z \times z' = (-2 + 3i)(1 - 4i) = -2 + 3i + 8i - 12i^2 = -2 + 11i + 12 = 10 + 11i$

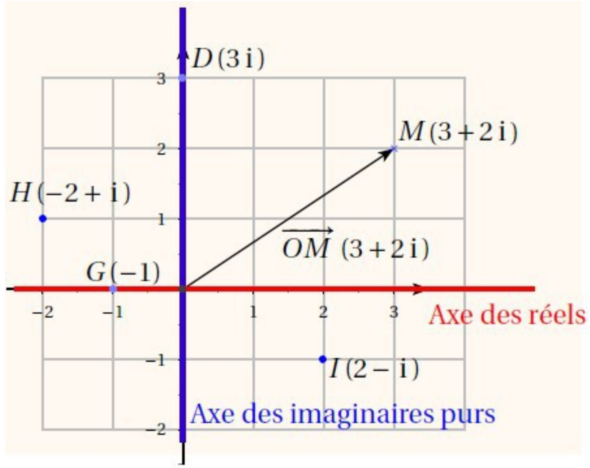
Remarque : il est souvent préférable d'effectuer le calcul du produit de 2 complexes sous la forme "directe" au lieu d'applicable la "formule"

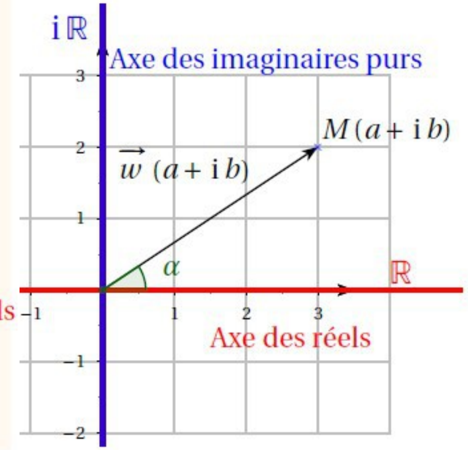
3) Représentation dans le plan complexe

Définition : Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct :

- à tout nombre complexe $z = a + i\,b$, on associe le point $M(a\,;b)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{w}$ qui sont le **point image** et **vecteur image de *z***
- à tout point $M(a\,;b)$ et vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{u}$ on associe le nombre complexe $z = a + i\,b$ appelé **affixe de M** et **affixe de** $\vec{w}$
- Le plan est alors appelé le **plan complexe** ou **plan d'*Argand-Cauchy***

représentation graphique :





4) Représentation dans le plan complexe

Propriétés : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ Soit les points A et B d'affixes z_A et z_B alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$
- le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$
- soit $\vec{w}(z), \vec{w}'(z')$ 2 vecteurs et $k \in \mathbb{R}$ alors l'affixe de $\vec{w} + \vec{w}'$ est $z + z'$ et l'affixe de $k\,\vec{w}$ est $k\,z$

exemples : Soient $A(2 - i), B(1 + 3i), C(4 + i)$ 3 points du plan complexe

- l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $-1 + 4i$
- l'affixe de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est $1 + 6i$
- l'affixe du milieu de [*BC*] est : $2{,}5 + 2i$

B) Forme géométrique d'un nombre complexe

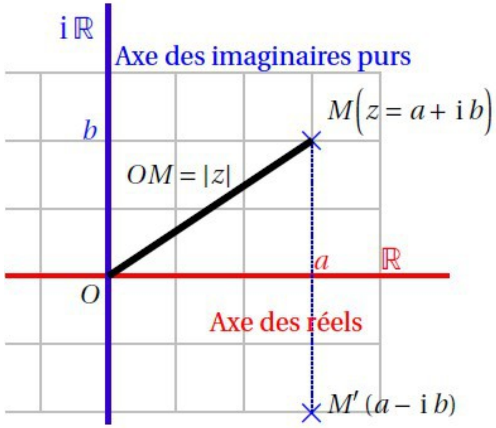
1) Module & conjugué d'un complexe

Définition : On se place dans le Plan Complexe muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit $z=a+ib$ un complexe de point image M

- On appelle **module** du complexe z le réel positif $|z|=OM=\sqrt{a^2+b^2}$
- On appelle **conjugué** du complexe z le complexe $\bar{z}=a-ib$

Rque : un complexe z et son conjugué $\bar{z}$ ont le le même module



exemples : Soit $z=3-4i\in\mathbb{C}$

- le module de z est $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$
- le conjugué de z est $\bar{z}=3+4i$
- l'image de z est $A(3;-4)$
- l'image de $\bar{z}$ est $B(3;4)$

2) Propriétés du conjugué

Propriété : Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$ dans le plan complexe muni d'un repère

- Un nombre complexe z est réel s'il est égal à son conjugué $z=\bar{z}$ soit encore $\Im(z)=0$
- Un nombre complexe z est imaginaire pur s'il est égal à l'opposé de son conjugué $z=-\bar{z}$ soit encore $\Re(z)=0$

exemples : soit $z=(2-m)+(m^2-1)i$; déterminer la valeur de m pour que $z\in\mathbb{R}$ puis la valeur de m pour que $z\in i\mathbb{C}$

- $z\in\mathbb{R}$ donc $z=\bar{z}$ donc $m^2-1=0$ donc $m=-1$ ou $m=1$
- $z\in i\mathbb{C}$ donc $z=-\bar{z}$ donc $2-m=0$ donc $m=2$

3) Propriétés algébriques du module

Propriétés : Soit un complexe $z\in\mathbb{C}$ avec $z=a+ib$; alors on a

- $|z\times z'|=|z|\times|z|'$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|z^n|=|z|^n$
- $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z|'}$ pour tout $z'\neq 0$

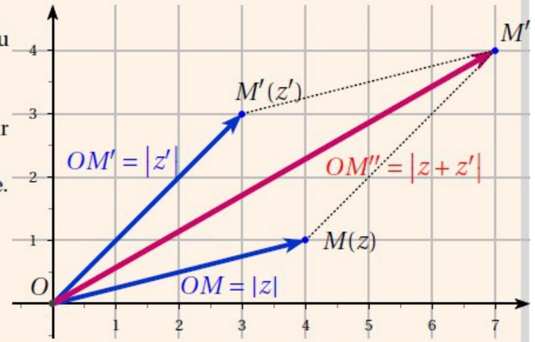
Propriétés : *Inégalité triangulaire*

Pour tout complexes z et z' du plan complexe : $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe.
Soit les points $M(z)$, $M'(z')$ et $M''(z+z')$.
Soit les vecteurs $\overrightarrow{OM}(z)$ et $\overrightarrow{OM'}(z')$ et le vecteur somme $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM''}$ est d'affixe $(z+z')$.
Ainsi le quadrilatère OMM"M' est un parallélogramme.
L'inégalité $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ signifie que

$$OM''\leq OM+MM''$$

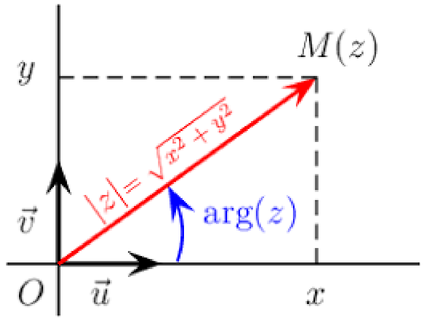
d'où le nom de cette inégalité.



Rque : dans le cas particulier où $|z+z'|=|z|+|z'|$ alors $z'=kz$

4) Argument d'un complexe

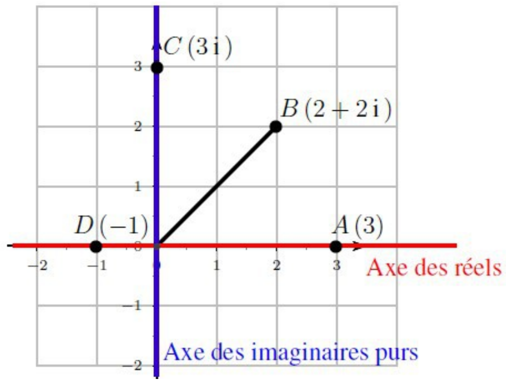
Définition : On appelle argument de z , noté $arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle de vecteur $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta$ avec $\theta\in]-\pi;\pi]$



exemple : soit $z=1+i\in\mathbb{C}$ alors $|z|=\sqrt{1^1+1^2}=\sqrt{2}$ et $arg(z)=\frac{\pi}{4}$

exemples graphiques :

z	3	$2+2\mathrm{i}$	$3\mathrm{i}$	-1
$\|z\|$	3	$2\sqrt{2}$	3	1
$\arg(z)$	$0\ [2\pi]$	$\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$	$\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$	$\pi\ [2\pi]$
Point	$A(3)$	$B(2+2\mathrm{i})$	$C(3\mathrm{i})$	$D(-1)$



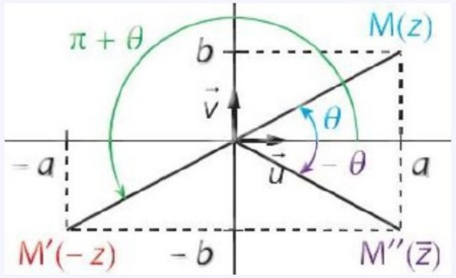
Rques :

- si $z\in\mathbb{R}$ alors son argument est 0 ou π
- si $z\in i\mathbb{C}$ alors son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$

5) Propriétés des Arguments d'un complexe

Propriétés : Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a+ib$; alors on a

1. z est un **réel non nul** si et seulement si $\arg(z) = 0 \ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \pi \ [2\pi]$.
2. z est un **imaginaire pur non nul** si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{-\pi}{2} \ [2\pi]$.
3. $\boxed{\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]}$.
4. $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]}$.



C) Équations du second degré

1) Équations du type $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Propriétés : Soit a un nombre réel. On cherche à résoudre l'équation $z^2 = a$

- Si $a = 0$ alors il existe une seule solution $z = 0$
- Si $a > 0$ alors il existe 2 solutions réelles : $z = -\sqrt{a}$ ou $z = \sqrt{a}$
- Si $a < 0$ alors il existe 2 solutions complexes imaginaires pures : $z = -i\sqrt{|a|}$ ou $z = i\sqrt{|a|}$

exemples : on donne les équations de degré 2 suivantes

- $z^2 = 4$ donne $z = -2$ ou $z = 2$
- $z^2 = -9$ donne $z = -3i$ ou $z = 3i$

2) Équations du type $az^2 + bz + c = 0$

Propriétés : Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z , où *a*, *b* et *c* sont des réels avec $a \neq 0$.

Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$ alors il existe une seule solution $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ alors il existe 2 solutions : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors il existe 2 solutions complexes : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

exemples : on donne les équations de degré 2 suivantes

- $z^2 - 4z + 4 = 0$; $\Delta = 0$; $z = 2$
- $z^2 - 5z + 4 = 0$; $\Delta = 9 > 0$; $z = 1$ ou $z = 4$
- $z^2 + 2z + 5 = 0$; $\Delta = -16 < 0$; $z = -1-2i$ ou $z = -1+2i$

D) Forme trigonométrique d'un complexe

1) Définition de la forme trigonométrique

Définition **:** Soit un complexe non nul z ; on note $|z| = r$ et $arg(z) = \theta$
on appelle écriture trigonométrique du complexe *z* : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

exemples : on établit le passage de l' « algébrique » au « trigonométrique »

- $z = 1+i$ donne $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
- $z = i$ donne $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
- $z = -\sqrt{3}+i$ donne $z = 2(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

2) Déterminer une forme trigonométrique

Propriétés : Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a+ib$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
Alors on a les relations suivantes :

- $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

exemples : déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants

- $z = 1+i$ donne $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et
  $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
- $z = -\sqrt{3}+i$ donne $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2$; $\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et
  $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{-2\pi}{3}$ donc $z = 2(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

3) Propriétés des arguments

Propriétés : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$; on a les propriétés suivantes

- $arg(z \times z') = arg(z) + arg(z')$ et $arg(z^n) = n\, arg(z)$
- $arg(\frac{z}{z}') = arg(z) - arg(z')$ et $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)$
- $arg(-z) = arg(z) + \pi$ et $arg(\overline{z}) = -arg(z)$

exemples : donner l'écriture algébrique puis trigonométrique des complexes définis par les points images ci-dessous

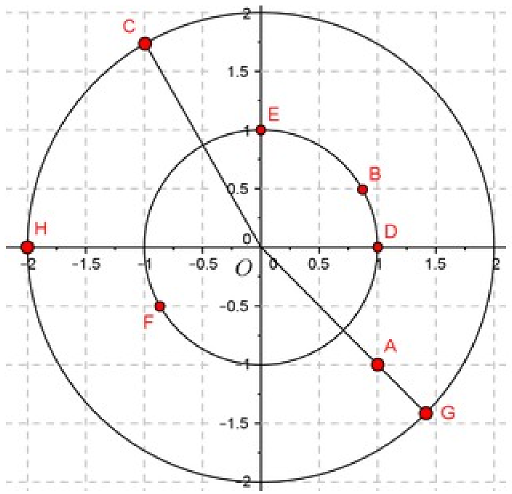
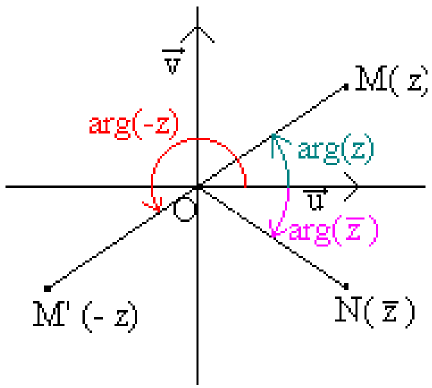


schéma type



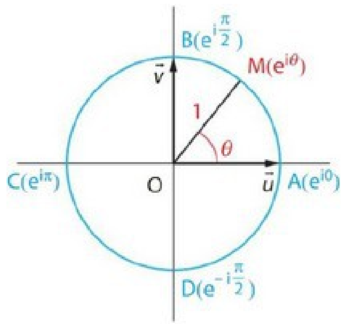
E) Forme exponentielle d'un complexe

1) La Notation exponentielle complexe

Définition **:** Soit un complexe non nul z ; on note $|z| = r$ et $arg(z) = \theta$
on appelle notation exponentielle complexe de z : $z = r\, e^{i\theta}$

exemples : déterminer la notation exponentielle des complexes ci-dessous

- $z = 1 + i$ donne $z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $z = i$ donne $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $z = -\sqrt{3} + i$ donne $z = 2 e^{i\frac{-2\pi}{3}}$
- $z = 2 - 2i$ donne $z = 2\sqrt{2} e^{i\frac{-\pi}{4}}$
- $z = 1 + \sqrt{3} i$ donne $z = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$



2) Applications de la Notation exponentielle

Propriétés : *les Formules d'EULER*

Pour tout réel θ on a les relations : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

explications : on met en relation les formes trigonométriques et exponentielles d'un même complexe z : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z = r\, e^{i\theta}$
donc $r\, e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
avec l'angle $-\theta$ on obtient $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
car $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

on déduit alors que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ donc $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

de même , on a $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ donc $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Propriétés : *les Formules de MOIVRE*
Pour tout réel θ et tout entier n : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

explications : on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ donc $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

3) Linéarisation de lignes trigonométriques

Principe : Grace aux formules de Moivre, on peut trouver des relations entre les puissances des sinus et cosinus de multiples des angles concernes

Exemples : on obtient facilement les reations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$

- $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ et $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$
- $\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$ et $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$

explication : $\cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 (e^{ix} + e^{-ix})^3 = \dfrac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3$

$$= \frac{1}{8}\left((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2.(e^{-ix}) + 3(e^{ix}).(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left((e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 6\cos(x)\right) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$$