NOMBRES COMPLEXES : METHODES

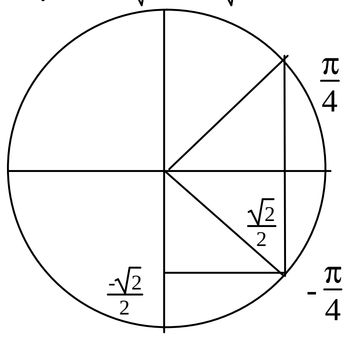
Comment calculer module et argument ?

Exemple : z = $3 - 3\,i$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\,\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Cos $\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On peut dire $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près.

Sin $\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ NEGATIF donc $\theta = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi$



donc z = $[\,3\sqrt{2}\,,\,\dfrac{-\pi}{4}\,] = 3\sqrt{2}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}$

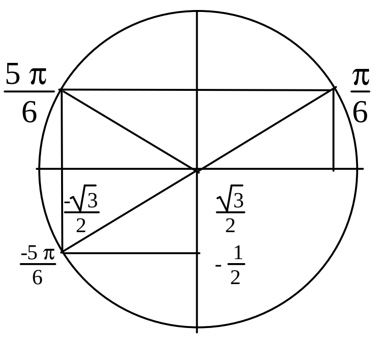
Exemple : z = $-3 - \sqrt{3}\,i$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = \sqrt{4}\,\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Cos $\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2 \times 3} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ On sait que, ou on lit sur le formulaire que $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On peut donc dire $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $\theta = \dfrac{-5\pi}{6}$ à 2π près.

Sin $\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$ NEGATIF donc $\theta = = \dfrac{-5\pi}{6} + 2k\pi$

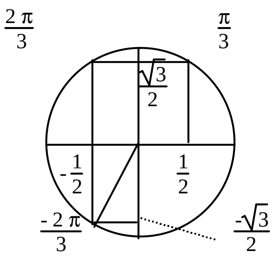


donc z = $[\,2\sqrt{3}\,,\,\dfrac{-5\pi}{6}] = 2\sqrt{3}\;e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Comment passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique ?

$\rho\, e^{i\theta} = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\cos\theta + i\,\rho\sin\theta$

exemple $2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3} + i\sin\dfrac{-2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$



Comment ajouter deux nombres complexes ?

Il faut obligatoirement la forme algébrique.

Exemple $\quad (2 + 3 i) + 3 (- 2 – 5 i) = 2 + 3 i – 6 - 15 i = - 4 - 12 i.$

Exemple $\quad 5 e^{i\frac{2\pi}{3}} + 3 e^{i\frac{-\pi}{6}} = 5 \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right) + 3 \left(\cos\frac{-\pi}{6} + i \sin\frac{-\pi}{6}\right) =$

$$5 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = -\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} – \frac{3}{2} \right)$$

Comment multiplier deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes , mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

Exemple : $\quad (3 + 4 i) (5 - 2 i) = 15 – 6 i + 20 i - 8 i^2 = 15 + 14 i + 8 = 23 + 14 i$

$$5 e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 10 \; e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)} = 10 e^{i\frac{p}{4}} \quad (= 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} + i \, 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \, i.$$

Comment diviser deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes , mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

Exemple : $\quad \frac{(3 + 4 i)}{(5 - 2 i)} = \frac{(3 + 4 i) (5 + 2 i)}{(5 - 2 i) (5 + 2 i)} = \frac{15 + 6 i + 20 i + 8 i^2}{25 – 4 i^2} = \frac{15 + 26 i – 8}{25 + 4} = \frac{7 + 26 i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29} i.$

Exemple $\quad \dfrac{5 e^{i\frac{\pi}{12}}}{2 e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{5}{2} \; e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2{,}5 \; e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Comment résoudre une équation du second degré ?

exemple $\quad 3 z^2 + 4 z + 1 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4 a c = 4^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4 \qquad \Delta > 0$ donc 2 solutions réelles

$$z_1 = \frac{- b + \sqrt{\Delta}}{2 a} = \frac{- 4 + \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{- 4 + 2}{6} = \frac{- 2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$z_2 = \frac{- b - \sqrt{\Delta}}{2 a} = \frac{- 4 - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{- 4 - 2}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \qquad \boxed{S = \left\{ -\frac{1}{3} ; - 1\right\}}$$

exemple $\quad - 3 z^2 + 4 z – 2 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4 a c = 4^2 - 4 \times (- 3) \times (- 2) = 16 – 24 = - 8 \qquad \Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{- b + i\sqrt{-\Delta}}{2 a} = \frac{- 4 + i \sqrt{8}}{2(- 3)} = \frac{- 4 + i \times 2\sqrt{2}}{-6} = \frac{- 2 + i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2 – i\sqrt{2}}{3}$$

$$z_2 = \frac{- b - i\sqrt{-\Delta}}{2 a} = \frac{- 4 - i \sqrt{8}}{2(- 3)} = \frac{- 4 - i \times 2\sqrt{2}}{-6} = \frac{- 2 - i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2 + i\sqrt{2}}{3} \qquad \boxed{S = \left\{ \frac{2 – i\sqrt{2}}{3} ; \frac{2 + i\sqrt{2}}{3} \right\}}$$

exemple $z^2 - 6 z + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 a c = (- 6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 – 36 = 0$ donc une solution double $z = \frac{- b}{2 a} = \frac{- (- 6)}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3.$

$\boxed{S = \{ 3\}}$

comment calculer une longueur, un angle dans un repère orthonormal?

Si les points A,B,C ont pour affixes respectives z_A, z_B, z_C

pour calculer la longueur AB, on calcule le module de $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Pour calculer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on calcule l'argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

comment démontrer que trois points sont alignés ?

Pour démontrer que A, B, C sont alignés, je démontre que l'argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ vaut 0 (π).

Pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, je démontre que l'argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}$ vaut 0 (π).

comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires?

Pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires, je démontre que l'argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ (π).

comment trouver l'image d'un point par une translation ou une rotation de centre W dans un repère orthonormal ?

exemple: A(3, 2) , $\vec{u}(2,-1)$ Ω (2 ; 1) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

$z_A = 3 + 2i$; $z_{\vec{u}} = 2 - i$; $z_{A'} = z_A + z_{\vec{u}} = 3 + 2i + 2 - i = 5 + i$.

donc A' a pour coordonnées (5 ; 1).

Soit B l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

la rotation est associée à la fonction définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) - z_\Omega = (z - z_\Omega)\, e^{i\theta}$ donc

$$z_B - z_\Omega = (z_A - z_\Omega)\, e^{i\theta} = [(3 + 2i) - (2 + i)]\, e^{i\frac{\pi}{6}} = (1 + i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = (1 + i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

donc B a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$

comment prouver qu'une rotation de centre W transforme A en B dans un repère orthonormal ?

Pour que cette rotation existe, il faut d'abord que $\Omega A = \Omega B$, donc que $\dfrac{\Omega A}{\Omega B} = 1$.

Je calcule $\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega B}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A}}}$, son module doit être 1 et son argument sera l'angle de la rotation.

exemple $z_A = 2 + 4i$; $z_B = -1 + 3i$ et $z_\Omega = 1 + 2i$.

$\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \dfrac{-1 + 3i - 1 - 2i}{2 + 4i - 1 - 2i} = \dfrac{-2 + i}{1 + 2i} = \dfrac{(-2 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \dfrac{-2 + 4i + i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \dfrac{5i}{5} = i$

le module est bien 1 donc ΩA = ΩB et l'argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$ donc l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

le point B est l'image du point A par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

comment trouver une rotation d'après la formule z' = a z + b avec ½a ½= 1?

On me demande de caractériser la transformation géométrique qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z e^{i\theta} + b$.

Je cherche d'abord un éventuel point fixe (ou invariant).

Il est sa propre image, il vérifie donc z' = z c'est-à-dire $z = z e^{i\theta} + b$.

donc $z - z e^{i\theta} = b$ donc $z(1 - e^{i\theta}) = b$ donc $z = \dfrac{b}{1 - e^{i\theta}}$.

on multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur, on trouve alors l'affixe du point invariant I.

On écrit $\begin{cases} z' = z e^{i\theta} + b \\ z_I = z_I e^{i\theta} + b \end{cases}$ on soustrait membre à membre les deux égalités, il vient alors

$z' - z_I = z e^{i\theta} + b - z_I e^{i\theta} - b$ donc $z' - z_I = (z - z_I) e^{i\theta}$;

on reconnaît l'écriture de la rotation de centre I et d'angle θ.

comment trouver une translation ou homothétie d'après la formule z' = k z + b avec k réel et b complexe.

On me demande de caractériser la transformation géométrique qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par z' = k z + b avec k réel.

Je cherche d'abord un éventuel point fixe (ou invariant).

Il est sa propre image, il vérifie donc z' = z c'est-à-dire z = k z + b.

donc z (1 – k) = b

* si k = 1

z' = z + b on reconnaît la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

* si b ≠ 1

$z = \dfrac{b}{1 - k}$; nous avons donc un point invariant I d'affixe $\dfrac{b}{1 - k}$.

on écrit $\begin{cases} z' = k z + b \\ z_I = k z_I + b \end{cases}$, on soustrait membre à membre les deux égalités, il vient alors

$z' - z_I = k z + b - k z_I - b$ donc $z' - z_I = k(z - z_I)$.

On reconnaît l'homothétie de centre I et de rapport k.