Ex 1* : (*) - *Sens de variation de suites

Étudier le sens de variations des suites (u_n) suivantes :

$u_n=\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=(1-\frac{1}{n+2})-(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

ainsi $u_{n+1}-u_n>0$ donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

$u_n=\frac{2^n}{n}$ la suite est à termes positifs pour $n>0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{2^n}=\frac{2n}{n+1}$ or $2n>n+1$ est vérifié pour $n\geqslant 2$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 2$

$u_n=\frac{3^n}{n^2}$ la suite est à termes positifs pour $n>0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{3^n}=\frac{3n^2}{(n+1)^2}$ or $3n^2>n^2+2n+1$ est vérifié pour $n\geqslant 2$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 2$

$u_n=\frac{n^2}{n!}$ la suite est à termes positifs pour $n>0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n^2}$

or $n+1<n^2$ est vérifié pour $n\geqslant 2$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ donc (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 2$

$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$ donc $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n+1}}$ or $\frac{1}{2^{n+1}}>0$

donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Ex 2* : (**) - *Suites homographiques

On donne la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+4}$ et $u_0=0$

a) On pose $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison

b) Exprimer v_n en fonction puis u_n en fonction de n

c) Étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite

---

→ correction en séance de SOS Maths

Ex 3* : (***) - *Suites récurrentes d'ordre 2

On donne la suite (u_n) définie par $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ avec $u_0=-1\,,\,u_1=\frac{1}{2}$

1) Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) a) Soit la suite (v_n) définie par $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison
   b) Exprimer v_n en fonction de n

3) a) Soit la suite (w_n) définie par $w_n=\frac{u_n}{v_n}$; montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le 1er terme et la raison
   b) Exprimer w_n en fonction de n

4) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n

---

→ correction en séance de SOS Maths

Ex 4* : (**) - *Limites de suites numériques

Calculer la limite des suites (u_n) suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

a) $u_n=\frac{2n+5}{3n-2}$; b) $u_n=\frac{2n^2-1}{n+1}$; c) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

d) $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$; e) $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$; f) $u_n=2^n-n^2+2(-1)^n$

$$u_n=\frac{2n+5}{3n-2}=\frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}}$$ or $\lim_{n\to+\infty}(\frac{5}{n})=\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{n})=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$

$$u_n=\frac{2n^2-1}{n+1}=\frac{2n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$ or $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n})=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}(2n-\frac{1}{n})=+\infty$ et

$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})=1$ par quotient on déduit $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

or $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1})=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n})=+\infty$ par composée $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

$$u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

or $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to+\infty}(n)=+\infty$ par composée $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-(\frac{1}{2})^{n+1})=2-(\frac{1}{2})^n$$

or $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ il s'agit d'une suite géométrique de raison $q\in[0;1]$

donc on déduit $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$

$u_n=2^n-n^2+2(-1)^n$; conjecture : $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$(-1)^n$ est alternée entre -1 et 1 et n'a donc pas de limite !

La méthode consiste à appliquer le *théorème de comparaisons*

on sait que $(-1)^n\geqslant-1$ donc $u_n\geqslant 2^n-n^2-2$

Montrons alors par récurrence que : $\forall n\geqslant 7$: $2^n\geqslant 2n^2$

On note la proposition $P_n=\{\forall n\geqslant 7, 2^n\geqslant 2n^2\}$

Initialisation : $2^7=128$ et $2\times7^2=98$ donc P_7 *est vraie*

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n pour lequel P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est encore vraie

on sait que $2^n\geqslant 2n^2$ donc $2^{n+1}\geqslant 2(2n^2)$

donc $2^{n+1}\geqslant 4n^2>2(n+1)^2$ pour $n\geqslant 3$

donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : $\forall n\geqslant 7$, $u_n\geqslant 2^n-n^2-2\geqslant 2n^2-n^2-2\geqslant n^2-2$

or $\lim_{n\to+\infty}(n^2-2)=+\infty$ d'après le théorème de majoration on obtient :

$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
