1S **Modèles de rédaction** **Enoncés**

Suites (arithmétiques et géométriques) **& Corrigés**

Exercice 1 (définition suite arithmétique)

Parmi les suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}$, déterminer celles qui sont arithmétiques et préciser dans ce cas le terme u_0 et la raison r.

a) $u_n = -\dfrac{n+4}{3}$ **b)** $u_n = n + \dfrac{1}{n+1}$ **c)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 + u_n \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

Solution

a) $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(n+1)+4}{3} - \left(-\dfrac{n+4}{3}\right) = \dfrac{-n-1+4+n-4}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$ et de terme initial $u_0 = -\dfrac{4}{3}$

b) $u_0 = 1 \quad u_1 = \dfrac{3}{2} \quad u_2 = \dfrac{7}{3}$

$u_1 - u_0 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$

$u_2 - u_1 = \dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{6}$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique

c) $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 4$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de terme initial $u_0 = 1$

d) $u_0 = 1 \quad u_1 = \dfrac{1}{2} \quad u_2 = \dfrac{1}{4}$

$u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

$u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique

Exercice 2 (terme général suite arithmétique)

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n sachant que (u_n) est une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$.

a) $u_0 = 3$ et $r = 2$

b) $u_2 = -3$ et $r = -\dfrac{3}{4}$

c) $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_3 = 4$

Solution

a) $u_n = u_0 + nr = 2n + 3$

b) $u_n = u_2 + (n-2)r = -3 + (n-2) \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{2}$

c) $r = \dfrac{u_3 - u_0}{3 - 0} = \dfrac{4 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{3} = \dfrac{3}{2} \qquad u_n = u_0 + nr = \dfrac{3}{2}n - \dfrac{1}{2}$

Exercice 3 (somme de termes d'une suite arithmétique)

Calculer les sommes suivantes :

a) $S = -3 + 2 + 7 + 12 + \ldots + 92$

b) $S = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 \ldots -34$

Solution

a) S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de terme initial $u_0 = -3$.

$u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow 92 = -3 + 5n \Leftrightarrow n = 19$

$S = \sum_{k=0}^{19} u_k = 20 \times \left(\frac{-3+92}{2}\right) = 890$

b) S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de terme initial $u_0 = 5$.

$u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow -34 = 5 - 3n \Leftrightarrow n = 13$

$S = \sum_{k=0}^{13} u_k = 14 \times \left(\frac{5-34}{2}\right) = -203$

Exercice 4 (définition suite géométrique)

Parmi les suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$, déterminer celles qui sont géométriques et préciser dans ce cas le terme u_0 et la raison q.

a) $u_n = 5^{2n}$ **b**) $u_n = \frac{1}{4}n + 1$ **c**) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ **d**) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$

Solution

a) $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 5^{2(n+1)} = 5^{2n+2} = 5^{2n} \times 5^2 = 25 \times u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 25$ et de terme initial $u_0 = 1$

b) $u_0 = 1 \qquad u_1 = \frac{5}{4} \qquad u_2 = \frac{3}{2}$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{5}$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas une suite géométrique

c) $u_0 = -2 \qquad u_1 = 4 \qquad u_2 = 16$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{-2} = -2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{16}{4} = 4$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas une suite géométrique

d) $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de terme initial $u_0 = 1$

Exercice 5 (terme général suite géométrique)

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n sachant que (u_n) est une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$

a) $u_0 = 3$ et $q = 2$ **b**) $u_2 = -3$ et $q = -\frac{3}{4}$ **c**) $u_0 = -4$ et $u_3 = -32$

Solution

a) $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

b) $u_n = u_2 \times q^{n-2} = -3 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

c) $u_3 = u_0 \times q^3 \Leftrightarrow -32 = -4 \times q^3 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2 \qquad u_n = u_0 \times q^n = -4 \times 2^n$

Exercice 6 (variations suite géométrique)

Dans chacun des cas suivants, préciser le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

a) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ **b**) $u_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$ **c**) $u_n = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ **d**) $u_n = -3^{2n}$

Solution

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$ $(q > 1)$ avec $u_0 = 1$ $(u_0 > 0)$ donc (u_n) est croissante

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2} - 1$ $(0 < q < 1)$ avec $u_0 = 1$ $(u_0 > 0)$ donc (u_n) est décroissante

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ $(q < 0)$ donc (u_n) n'est pas monotone

d) $u_n = -3^{2n} = -(3^2)^n = -9^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 9$ $(q > 1)$ avec $u_0 = -1$ $(u_0 < 0)$ donc (u_n) est décroissante

Exercice 7 (somme de termes d'une suite géométrique)

Calculer la somme $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 2187$

Solution

a) S est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $r = 3$ et de terme initial $u_0 = 1$.

$u_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow 2187 = 1 \times 3^n \Leftrightarrow n = 7$

$$S = \sum_{k=0}^{7} u_k = 1 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 3280$$

Exercice 8 (problème avec suite arithmétique)

Un artisan fabrique des santons de Noël. Il décide de reprendre la fabrication des santons dès le mois de janvier en en fabriquant 200 et en augmentant tous les mois sa production de 40 santons. On note p_n le nombre de santons fabriqués le $n^{\text{ème}}$ mois $(n \in \mathbb{N}^*)$. $\left(\text{On a donc } p_1 = 200\right)$

1) Calculer p_2 et p_3

2) Déterminer la relation entre p_{n+1} et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) Exprimer p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4) Combien de santons l'artisan a-t-il fabriqués en décembre ?

5) Pourra-t-il fin décembre honorer une commande de 5000 santons ?

Solution

1) $p_2 = p_1 + 40 = 200 + 40 = 240$

$p_3 = p_2 + 40 = 240 + 40 = 280$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_{n+1} = p_n + 40$

3) Ainsi (p_n) est une suite arithmétique de raison $r = 40$ et de premier terme $p_1 = 200$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n = p_1 + (n-1)r = 200 + (n-1) \times 40 = 40n + 160.$

4) $p_{12} = 40 \times 12 + 160 = 640$

L'artisan a fabriqué 640 santons en décembre.

5) On calcule le nombre total de santons fabriqués entre janvier et décembre :

$$S = p_1 + p_2 + \ldots + p_{12} = 12 \times \frac{p_1 + p_{12}}{2} = 12 \times \frac{200 + 640}{2} = 5040$$

Donc l'artisan pourra honorer une commande de 5000 santons fin décembre.

Exercice 9 (problème avec suite géométrique)

Une entreprise a acheté en 2000 une machine d'une valeur de 50000 euros. Chaque année, la machine perd $15\ \%$ de sa valeur. On note u_n la valeur de la machine l'année $2000 + n$ $(n \in \mathbb{N})$. $\left(\text{On a donc } u_0 = 50000\right)$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier

3) Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) Quelle est la valeur de la machine en 2007 ?

5) Déterminer en quelle année la valeur de la machine sera inférieure à 5000 euros

Solution

1) $u_1 = u_0 \times 0.85 = 50000 \times 0.85 = 42500$

$u_2 = u_1 \times 0.85 = 42500 \times 0.85 = 36125$

2) $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 0,85 u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 50000$.

3) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 \times q^n = 50000 \times 0.85^n$

4) $u_7 = 50000 \times 0.85^7 \approx 16029$

La valeur de la machine en 2007 est d'environ 16029 euros.

5) Comme $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors (u_n) est décroissante.
De plus $u_{14} = 50000 \times 0.85^{14} \approx 5138$ et $u_{15} \approx 50000 \times 0.85^{15} \approx 4368$
La valeur de la machine sera inférieure à 5000 euros en 2015.

Exercice 10 (problème se ramenant à une suite géométrique)

Une banque propose pour un placement de 1000 euros fait le 1er janvier 2005, un taux d'intérêt annuel de $4\ \%$ auquel s'ajoute une prime constante de 50 euros versée à la fin de chaque année. On note C_n le capital obtenu le 1er janvier de l'année $2005 + n$ $(n \in \mathbb{N})$.

1) Préciser C_0 puis calculer C_1 et C_2.
2) La suite (C_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3) Etablir une relation entre C_{n+1} et C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4) On pose, pour tout entier naturel n : $U_n = C_n + 1250$.
 a) Calculer U_0 puis U_1
 b) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison.
 c) Exprimer U_n puis C_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 d) Calculer le capital obtenu en 2015.

Solution

Augmenter de $4\ \%$ revient à multiplier par $1,04$
1) $C_0 = 1000$ $C_1 = C_0 \times 1.04 = 1000 \times 1.04 + 50 = 1090$ $C_2 = C_1 \times 1.04 = 1090 \times 1.04 + 50 = 1183.6$
2) $C_1 - C_0 = 1090 - 1000 = 90$ et $C_2 - C_1 = 1183.6 - 1090 = 93.6$
$C_1 - C_0 \neq C_2 - C_1$ donc (C_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{C_1}{C_0} = \dfrac{1090}{1000} = 1.09$ et $\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{1183.6}{1090} \approx 1.086$
$\dfrac{C_1}{C_0} \neq \dfrac{C_2}{C_1}$ donc (C_n) n'est pas géométrique
3) $\forall n \in \mathbb{N} : C_{n+1} = 1.04C_n + 50$
4)
 a) $U_0 = C_0 + 1250 = 1000 + 1250 = 2250$
$U_1 = C_1 + 1250 = 1090 + 1250 = 2340$
 b) $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = C_{n+1} + 1250 = 1.04C_n + 50 + 1250 = 1.04(U_n - 1250) + 1300 = 1.04U_n$
Ainsi (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $U_0 = 2250$
 c) $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = U_0 \times q^n = 2250 \times 1,04^n$ et $C_n = U_n - 1250 = 2250 \times 1,04^n - 1250$.
 d) $C_{10} = 2250 \times 1.04^{10} - 1250 \approx 2080.55$
Le capital obtenu en 2015 sera d'environ $2080,55$ euros.