Correction 1

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant 0$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

- **Initialisation :**
Voici les premiers termes de la suite (u_n) :
  - $u_0 = 1$
  - $u_1 = \frac{1}{3}\cdot u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3}\times 1 - 2 = -\frac{5}{6}$
  - $u_2 = \frac{1}{3}\cdot u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) + 1 - 2$
  $= -\frac{5}{18} - 1 = -\frac{23}{18}$
  - $u_3 = \frac{1}{3}\cdot u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{23}{18}\right) + 2 - 2 = -\frac{23}{54}$
  - $u_4 = \frac{1}{3}\cdot u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{23}{54}\right) + 1$
  $= -\frac{23}{162} + 1 = \frac{162}{162} - \frac{23}{162} = \frac{139}{162}$

On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_4$ est vraie.

- **Hérédité :**
On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque supérieur ou égal à 4. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \geqslant 0$
n étant supérieur ou égal à 4, on peut écrire :
$n = (n-4) + 4$ où $n-4 \geqslant 0$.
D'après la définition du terme de rang $(n+1)$ de la suite (u_n), on a :
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 = \frac{1}{3}\cdot u_n + (n-4) + 4 - 2$$
$$= \frac{1}{3}\cdot u_n + (n-4) + 2$$
L'hypothèse de récurrence donne $u_n \geqslant 0$
$\geqslant 0$
Car u_{n+1} est la somme de terme positif.
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 4 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on établit que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

2. a. On a :
$$v_{n+1} = -2\cdot u_{n+1} + 3\cdot(n+1) - \frac{21}{2}$$
$$= -2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2\right) + 3\cdot(n+1) - \frac{21}{2}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot u_n - 2\cdot n + 4 + 3\cdot n + 3 - \frac{21}{2}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\cdot\left(-2\cdot u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot u_n$$
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$$v_0 = -2\cdot u_0 + 3\cdot 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$$
Ainsi, le terme de rang n de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{25}{2}$ a pour valeur :
$v_n = \frac{25}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$
Ainsi, on a :
$$v_n = -2\cdot u_n + 3\cdot n - \frac{21}{2}$$
$$v_n - 3\cdot n + \frac{21}{2} = -2\cdot u_n$$
$$u_n = -\frac{1}{2}\cdot v_n + \frac{3}{2}\cdot n - \frac{21}{4}$$
$$u_n = -\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\cdot n - \frac{21}{4}$$

Correction 2

1. a. D'après la définition des termes de la suite (v_n) :
$v_n = u_{n+1} - u_n = (u_n + 2\cdot n + 2) - u_n = 2\cdot n + 2$

b. Etudions la différence de deux termes consécutifs de la suite (v_n) :
$v_{n+1} - v_n = \left[2\cdot(n+1) + 2\right] - (2\cdot n + 2)$
$= 2\cdot n + 2 + 2 - 2\cdot n - 2 = 2$
On en déduit que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme :
$v_0 = u_1 - u_0 = (0 + 2\times 0 + 2) - 0 = 2$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$S_n = (n+1)(n+2)$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a :
$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} v_k = v_k = 2 \quad ; \quad (0+1)(0+2) = 1\times 2 = 2$$
On vient de montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}$$
  - Etudions le terme de rang $n+1$:
$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} v_k = \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) + v_{n+1}$$
D'après l'hypothèse de récurrence :
$= (n+1)(n+2) + 2\cdot(n+1) + 2$
$= n^2 + 2\cdot n + n + 2 + 2\cdot n + 2 + 2 = n^2 + 5\cdot n + 6$
  - $\left[(n+1)+1\right]\left[(n+1)+2\right] = (n+2)(n+3)$
$= n^2 + 3\cdot n + 2\cdot n + 6$
$= n^2 + 5\cdot n + 6$

On en déduit l'égalité :
$S_{n+1} = \left[(n+1)+1\right]\left[(n+1)+2\right]$
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété

$\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Correction 3

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul définie par :

$\mathcal{P}_n$: "$x^n - 1 = (x-1)(1+x+\cdots+x^{n-1})$"

Démontrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifié pour tout entier naturel n non-nul :

- **Inialisation :**
  Au rang 1, on a :
  - $x^1 - 1 = x - 1$
  - $(x-1)(1) = x-1$

  La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $x^n - 1 = (x-1)(1+x+\cdots+x^{n-1})$

  On a :
  $$\begin{aligned} x^{n+1} - 1 &= x^{n+1} - x^n + x^n - 1 \\ &= x^{n+1} - x^n + (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) \\ &= x^n\cdot(x-1) + (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) \\ &= (x-1)\Big[x^n + (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\Big] \\ &= (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n) \end{aligned}$$

  La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

Correction 4

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

   $\mathcal{P}_n$: "$u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**
     On a les deux valeurs suivantes :
     $u_0 = 13 \quad ; \quad 1 + \dfrac{12}{5^0} = 1 + \dfrac{12}{1} = 1 + 12 = 13$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
     $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$
     La définition de la suite (u_n) permet d'obtenir l'expression du terme de rang $(n{+}1)$:
     $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\cdot\Big(1+\frac{12}{5^n}\Big) + \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5^n} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}} \end{aligned}$$
     On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :**
     On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et qu'elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. On a l'encadrement $0 < \dfrac{1}{5} < 1$. On en déduit la limite :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{1}{5}\Big)^n = 0$$
   On en déduit la limite :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 1 + \frac{12}{5^n} = \lim_{n\mapsto+\infty} 1 + 12\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n = 1 + 12\times 0 = 1$$

Correction 5

1. On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :

   $\mathcal{P}_n$: "$u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\cdot\Big(\dfrac{1}{5}\Big)^n$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

   - **Initialisation :**
     Pour $n{=}1$, on a les deux valeurs :
     $$u_1 = 0{,}1 \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\times\frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$
     On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
     $u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\cdot\Big(\dfrac{1}{5}\Big)^n$
     La définition de la suite (u_n) donne une expression du terme de rang $(n{+}1)$, on a :
     $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\cdot\Big[\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big] + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{20} - \frac{1}{5}\times\frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1} + \frac{12}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1} \end{aligned}$$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :**
     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

2. On a l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{1}{5} < 1$. On en déduit la limite :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{1}{5}\Big)^n = 0$$
   On en déduit la liimite suivante :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\times 0 = \frac{3}{4}$$

3. Résolvons l'inéquation suivante :

$$\frac{3}{4} - u_n < 10^{-7}$$
$$\frac{3}{4} - \left[\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] < 10^{-7}$$
$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{13}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7}$$
$$\frac{13}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{4}{13}\times 10^{-7}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{4\times 10^{-7}}{13}$$

la fonction logarithmique étant croissante :

$$\ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] < \ln\left(\frac{4\times 10^{-7}}{13}\right)$$
$$n\cdot\ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4\times 10^{-7}}{13}\right)$$

Comme $0<\frac{1}{5}<1$, on a : $\ln\left(\frac{1}{5}\right)<0$:

$$n > \frac{\ln\left(\frac{4\times 10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$$

On a la valeur approchée : $\dfrac{\ln\left(\frac{4\times 10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 10{,}7$:

$$n \geqslant 11$$

Ainsi, l'inégalité recherchée est réalisée à partir du rang 11.

Correction 6

1. Considérons pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n \leqslant 7$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a : $u_0 = 5 \leqslant 7$
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leqslant 7$
Partons de la comparaison suivante :
$$u_n \leqslant 7$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{7}{3}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \leqslant \frac{7}{3} + 4$$
$$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3}$$
$$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3} \leqslant 7$$
$$u_{n+1} \leqslant 7$$
On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

2. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{Q}_n$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
Le terme de rang 1 a pour valeur :
$u_1 = \frac{1}{3}\times 5 + 4 = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$
On a la comparaison :
$$5 < \frac{17}{3}$$
$$u_0 < u_1$$
Ainsi, la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leqslant u_{n+1}$
Partons de la comparaison :
$$u_n < u_{n+1}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1} + 4$$
$$u_{n+1} < u_{n+2}$$
On vient détablir la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 7

1. Voici les quatre premiers termes de cette suite :

- $u_1 = \frac{1}{2}$
- $u_2 = \frac{1+1}{2\times 1}\cdot u_1 = \frac{2}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $u_3 = \frac{2+1}{2\times 2}\cdot u_2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
- $u_4 = \frac{3+1}{2\times 3}\cdot u_3 = \frac{4}{6}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel non-nul n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant 0$"
Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

- **Initialisation ;**
Pour $n=1$, on a :
$$u_1 = \frac{1}{2} \geqslant 0$$
La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :

$u_n \geqslant 0$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{n+1}{2{\cdot}n} \geqslant 0$$

u_n étant positif, on a :

$$\frac{n+1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n \geqslant 0{\times}u_n$$
$$\frac{n+1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n \geqslant 0$$
$$u_{n+1} \geqslant 0$$

On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide du raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

b. Etudions le signe de la différence suivante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n - u_n = \Big(\frac{n+1}{2{\cdot}n} - 1\Big){\cdot}u_n$$
$$= \frac{n+1-2{\cdot}n}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n = \frac{1-n}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n$$

Or, pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$u_n \geqslant 0 \quad ; \quad 1-n \leqslant 0$

On en déduit le signe de cette différence :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n - u_n = \frac{1-n}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n \leqslant 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

c. La suite (u_n) étant positive, elle est minorée par 0. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Etudions l'expression du terme v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n}{n+1} = \frac{n+1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n{\times}\frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2{\cdot}n}{\cdot}u_n = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}{\cdot}v_n$$

On vient de démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et dont le premier terme a pour valeur :

$$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$$

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) a son terme de rang n qui admet pour expression :

$$v_n = \frac{1}{2}{\times}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

On en déduit l'expression du terme u_n de rang n en fonction de son rang :

$$v_n = \frac{u_n}{n}$$
$$u_n = v_n{\cdot}n$$
$$u_n = \frac{1}{2^n}{\cdot}n$$
$$u_n = \frac{n}{2^n}$$

Correction 8

1. a. On a :

$$u_1 = \frac{1}{5}{\cdot}u_0 + 3{\times}0{,}5^0 = \frac{1}{5}{\times}2 + 3{\times}1 = \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{5}$$

b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“}u_n \geqslant \frac{15}{4}{\times}0{,}5^n\text{”}$$

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
$$u_1 = \frac{17}{5} = 3{,}4 \quad ; \quad \frac{15}{4}{\times}0{,}5^1 = \frac{15}{4}{\times}\frac{1}{2} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$
La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel non-nul n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$$u_n \geqslant \frac{15}{4}{\times}0{,}5^n$$
Partons de cette comparaison :
$$u_n \geqslant \frac{15}{4}{\times}0{,}5^n$$
$$\frac{1}{5}{\cdot}u_n \geqslant \frac{1}{5}{\cdot}\Big(\frac{15}{4}{\times}0{,}5^n\Big)$$
$$\frac{1}{5}{\cdot}u_n \geqslant \frac{3}{4}{\times}0{,}5^n$$
$$\frac{1}{5}{\cdot}u_n + 3{\times}0{,}5^n \geqslant \frac{3}{4}{\times}0{,}5^n + 3{\times}0{,}5^n$$
$$u_{n+1} \geqslant \Big(\frac{3}{4}+3\Big){\times}0{,}5^n$$
$$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4}{\times}0{,}5^n$$
De la comparaison $1 \geqslant 0{,}5$:
$$u_{n+1}{\times}1 \geqslant \frac{15}{4}{\times}0{,}5^n{\times}0{,}5$$
$$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4}{\times}0{,}5^{n+1}$$
La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

2. On a les transformations algébriques suivantes :

$$u_{n+1} - u_n = \Big(\frac{1}{5}{\cdot}u_n + 3{\times}0{,}5^n\Big) - u_n$$
$$= \Big(\frac{1}{5} - 1\Big){\cdot}u_n + 3{\times}0{,}5^n = -\frac{4}{5}{\cdot}u_n + 3{\times}0{,}5^n$$

De la question 1., on a $-u_n \leqslant -\frac{15}{4}{\times}0{,}5^n$

$$\leqslant -\frac{15}{4}{\times}0{,}5^n + 3{\times}0{,}5^n \leqslant \Big(-\frac{15}{4}+3\Big){\cdot}0{,}5^n$$
$$\leqslant -\frac{3}{4}{\times}0{,}5^n \leqslant 0$$

3. De la question 1., on en déduit que les termes de la suite (u_n) sont positifs.

De la question 2., on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$
$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

D'après les théorèmes de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 9

1. Voici les quatre premiers termes de cette suite :

- $u_0 = 1$

- $u_1 = \frac{1}{3}\cdot u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3}\times 1 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$
- $u_2 = \frac{1}{3}\cdot u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$
- $u_3 = \frac{1}{3}\cdot u_2 + 1 - 2 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{14}{9}\right) + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant 0$"
Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel supérieur ou égal 4, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation :**
Le terme de rang 4 a pour valeur :
$$u_4 = \frac{1}{3}\cdot u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{14}{27}\right) + 1$$
$$= -\frac{14}{81} + 1 = -\frac{14}{81} + \frac{81}{81} = \frac{67}{81} \geqslant 0$$
La propriété $\mathcal{P}_4$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel quelconque ; c'est à dire qu'on a pour hypothèse par récurrence :
$u_n \geqslant 0$
Par définition des termes de la suite (u_n) :
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2$$
Le rang n étant supérieur à 4 :
$$\geqslant \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 - 2$$
$$\geqslant \frac{1}{3}\cdot u_n + 2$$
Au rang n, on a $u_n \geqslant 0$
$$\geqslant \frac{1}{3}\times 0 + 2$$
$$\geqslant 2 \geqslant 0$$
La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $(n{+}1)$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5 ; on en déduit que $(n{-}1)$ est supérieur ou égal à 4.
On a l'égalité :
$$u_n = \frac{1}{3}\cdot u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}\cdot u_{n-1} + n - 3$$
Puisque $n{-}1 \geqslant 1$, de la question précédente :
$$\geqslant \frac{1}{3}\times 0 + n - 3$$
$$\geqslant n - 3$$

c. On a la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n{-}3 = +\infty$
A l'aide de l'inégalité obtenue à la question précédente et par les théorèmes de comparaison des suites monotones, on a :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$

Correction 10

1. Pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} - u_n = \big(u_n + 2\cdot n + 2\big) - u_n = 2\cdot n + 2 \geqslant 0$
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} \geqslant u_n$

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n > n^2$"
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Inialisation :**
Pour $n{=}0$, on a : $u_0{=}2{>}0^2$
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque ; c'est à dire qu'on a comme hypothèse de récurrence :
$u_n > n^2$
Par définition des termes de la suite (u_n) :
$$u_{n+1} = u_n + 2\cdot n + 2$$
$$> n^2 + 2\cdot n + 2$$
$$> n^2 + 2\cdot n + 2 > n^2 + 2\cdot n + 1$$
$$> n^2 + 2\cdot n + 1$$
$$> \big(n+1\big)^2$$
On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que cette relation est vraie pour tout entier naturel n.

b. D'après la question 1., que la suite (u_n) est croissante.
De la comparaison obtenue à la question 2. a. et de la limite $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n^2{=}{+}\infty$, on obtient , d'après les théorèmes de divergence des suites monotones, la limite de la suite (u_n) :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$

Correction 11

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel non-nul n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant \sqrt{2}$"
Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

- **Initialisation :**
On a :
$$u_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \times\frac{2}{1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + 4\right) = \frac{1}{2}\times\frac{9}{2} = \frac{9}{4} \geqslant \sqrt{2}$$
La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel non-nul n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse par récurrence :
$u_n \geqslant \sqrt{2}$
De la comparaison :

$u_n \geqslant \sqrt{2}$

La fonction f est croissante sur $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$

$f(u_n) \geqslant f\big(\sqrt{2}\big)$

$u_{n+1} \geqslant f\big(\sqrt{2}\big)$

$u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$

On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la relation d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

2. On a les transformations algébriques :

$$f(x)-x = \frac{1}{2}\cdot\Big(x+\frac{2}{x}\Big)-x = \frac{1}{2}\cdot\Big(x+\frac{2}{x}-2x\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{2}{x}-x\Big) = \frac{2-x^2}{2x} = \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{2x}$$

On obtient le tableau de signes de cette différence sur $]0\,;+\infty[$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2-x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)-x$					||	$+$	0	$-$	

Ainsi, on vient d'établir que sur l'intervalle $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$:

$f(x)-x \leqslant 0$

$f(x) \leqslant x$

3. La question 1. a permis montrer que tout entier naturel n non-nul, le terme u_n appartiennent à l'intervalle $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$.

Ainsi, d'après la question 2., pour tout entier naturel n non nul, on a la comparaison :

$f(u_n) \leqslant u_n$

Par définition de la suite (u_n), on a :

$u_{n+1} \leqslant u_n$

On vient d'établir que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. D'après la question 1., la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissant à partir du rang 1.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 12

1. On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n , par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n > 0$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 4$, donc $u_0 > 0$.

On en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. Ainsi, on a l'hypothèse de récurrence suivante :

$u_n > 0$

On a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\frac{5}{u_n}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\frac{5}{u_n}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot u_n\cdot\Big(1+\frac{5}{u_n^2}\Big)$$

Or chaque facteur de ce produit est strictement positif : $u_n > 0$; $1+\frac{5}{u_n^2} \leqslant 1$

On en déduit : $u_{n+1} > 0$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $\mathcal{P}_n$ s'initialise au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel non-nul n par la relation :

$\mathcal{Q}_n$: "$u_n - \sqrt{5} \geqslant 0$"

- **Initialisation :**

On a $u_0 = 4$; ainsi, $u_0 \geqslant \sqrt{5} \implies u_0 - \sqrt{5} \geqslant 0$

La propriété $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence : $u_n - \sqrt{5} \geqslant 0$

$$u_{n+1}-\sqrt{5} = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\frac{5}{u_n}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\frac{5}{u_n}\Big)-\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n+\frac{5}{u_n}-2\sqrt{5}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{u_n^2-2\sqrt{5}\cdot u_n+5}{u_n}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\big(u_n-\sqrt{5}\big)^2}{u_n}$$

On a montré à la question précédente que u_n était strictement positif ; ainsi, le quotient est positif. On en déduit :

$u_{n+1} - \sqrt{5} \geqslant 0$

On vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

3. Considérons la propriété $\mathcal{R}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul et par la relation :

$\mathcal{R}_n$: "$u_n - \sqrt{5} \leqslant \frac{1}{2^n}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{R}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

- **Initialisation :**

Le terme de rang 1 de la suite (u_n) a pour valeur :

$$u_1 = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_0+\frac{5}{u_0}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(4+\frac{5}{4}\Big) = \frac{1}{2}\times\frac{16+5}{4}$$

$$= \frac{21}{8}$$

L'utilisation de la calculatrice permet d'obtenir la valeur approchée suivante :

$u_1 - \sqrt{5} = \frac{21}{8} - \sqrt{5} \approx 0{,}39$

On en déduit l'inégalité suivante :

$u_1 - \sqrt{5} \leqslant \frac{1}{2^1}$

Ainsi, la propriété $\mathcal{R}_1$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{R}_n$ est vraie pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :

  $u_n - \sqrt{5} \leqslant \frac{1}{2^n}$

  Etudions la différence suivante :

  $$u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_n + \frac{5}{u_n}\Big) - \sqrt{5}$$

  $$= \frac{1}{2}\cdot u_n - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2\cdot u_n} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

  $$= \frac{1}{2}\cdot\big(u_n - \sqrt{5}\big) + \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{5}{u_n} - \sqrt{5}\Big)$$

  $$= \frac{1}{2}\cdot\big(u_n - \sqrt{5}\big) + \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{5}{u_n} - \sqrt{5}\Big)$$

  La propriété étant vraie au rang n, on a :

  $$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{5}{u_n} - \sqrt{5}\Big) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\times\frac{5 - \sqrt{5}\cdot u_n}{u_n}$$

  $$= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}\cdot\big(\sqrt{5} - u_n\big)}{u_n}$$

  A la question 2., on a montré : $u_n - \sqrt{5} \geqslant 0$

  $$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{R}_n$ est initialisé au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{R}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

4. Ainsi, à l'aide des questions 2. et 3., on obtient l'encadrement pour tout entier naturel n non-nul :

   $$0 \leqslant u_n - \sqrt{5} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

   $$\sqrt{5} \leqslant \quad u_n \quad \leqslant \sqrt{5} + \frac{1}{2^n}$$

   On a les deux limites suivantes :

   $$\lim_{n\mapsto+\infty} \sqrt{5} = \sqrt{5} \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \sqrt{5} + \frac{1}{2^n} = \sqrt{5}$$

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit la limite suivante :

   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \sqrt{5}$$

Correction 13

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

   $\mathcal{P}_n$: "$0 < v_n < 3$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**

     On a les encadrements :

     $0 < 1 < 3 \quad \Longrightarrow \quad 0 < v_n < 3$

     La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   - **Hérédité :**

     Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

     $0 < v_n < 3$

     Partons de l'encadrement :

     $$\begin{aligned} 0 <& \quad v_n &< 3 \\ 0 >& \quad -v_n &> -3 \\ 6+0 >& \quad 6-v_n &> 6-3 \\ 6 >& \quad 6-v_n &> 3 \\ \frac{1}{6} <& \quad \frac{1}{6-v_n} &< \frac{1}{3} \\ \frac{9}{6} <& \quad \frac{9}{6-v_n} &< \frac{9}{3} \\ \frac{3}{2} <& \quad v_{n+1} &< 3 \\ 1 < \frac{3}{2} <& \quad v_{n+1} &< 3 \\ 1 <& \quad v_{n+1} &< 3 \end{aligned}$$

     La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   - **Conclusion :**

     La propriété $\mathcal{P}_n$ est inialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, nous venons de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. a. Etudions la différence consécutive de deux termes de la suite (v_n) :

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6-v_n} - v_n = \frac{9 - v_n\cdot(6-v_n)}{6-v_n}$$

   $$= \frac{3^2 - 6\cdot v_n + {v_n}^2}{6-v_n} = \frac{\big(3-v_n\big)^2}{6-v_n}$$

   b. D'après la question précédente :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{\big(3-v_n\big)^2}{6-v_n}$$

   Le numérateur du quotient étant un carré, il est positif. D'après la question 1., les termes v_n sont majorés par 3 : on en déduit que le dénominateur est strictement positif.

   Ainsi, la différence de deux termes consécutifs de la suite (v_n) est positive : la suite (v_n) est croissante.

3. La suite (v_n) est une suite croissante et majorée par 3. D'après les théorèmes de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (v_n) est convergente.

Correction 14

1. On a les termes suivans :

   - $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 5\times8 - 6\times3 = 40 - 18 = 22$
   - $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 5\times22 - 6\times8 = 110 - 48 = 62$

2. On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

   $\mathcal{P}_n$: "$u_n = 2^n + 2\times3^n$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**

     On a les deux valeurs :

     $u_0 = 3 \quad ; \quad 2^0 + 2\times3^0 = 1 + 2\times1 = 1 + 2 = 3$

     On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   - **Hérédité :**

     On suppose que la relation $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire que l'hypothèse de récurrence est :

     $u_n = 2^n + 2\times3^n$

     Ainsi, on a

D'après la définition de la suite (u_n), on a :

$u_{n+1} = 5{\cdot}u_n - 6{\cdot}u_{n-1}$
$= 5{\cdot}\big(2^n + 2{\times}3^n\big) - 6{\cdot}\big(2^{n-1} + 2{\times}3^{n-1}\big)$
$= 5{\times}2^n + 10{\times}3^n - 6{\times}2^{n-1} - 12{\times}3^{n-1}$
$= 5{\times}2^n + 10{\times}3^n - 3{\times}2^n - 4{\times}3^n$
$= 2{\times}2^n + 6{\times}3^n = 2^{n+1} + 2{\times}3^{n+1}$

On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Puisque 2 et 3 sont deux nombres réels strictement supérieur à 1, on a les deux limites :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2^n = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} 3^n = +\infty$

On en déduit la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2^n + 2{\times}3^n = +\infty$

Correction 15

1. a. On a :

- $u_1 = \dfrac{3{\cdot}u_0}{1+2{\cdot}u_0} = \dfrac{3{\times}\frac{1}{2}}{1+2{\times}\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1+1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$

- $u_2 = \dfrac{3{\cdot}u_1}{1+2{\cdot}u_1} = \dfrac{3{\times}\frac{3}{4}}{1+2{\times}\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}}$
  $= \dfrac{9}{4}{\times}\dfrac{2}{5} = \dfrac{9}{10}$

b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$0 < u_n$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnment par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  De la comparaison $0 < \dfrac{1}{2}$, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
  $0 < u_n$
  On en déduit les signes des expressions suivantes :
  $3{\cdot}u_n > 0 \quad ; \quad 1{+}2{\cdot}u_n > 0$
  On en déduit : $u_{n+1} = \dfrac{3{\cdot}u_n}{1{+}2{\cdot}u_n} > 0$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. a. Etudions la différence suivante :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3{\cdot}u_n}{1+2{\cdot}u_n} - u_n = \dfrac{3{\cdot}u_n - u_n{\cdot}(1+2{\cdot}u_n)}{1+2{\cdot}u_n}$
$= \dfrac{3{\cdot}u_n - u_n - 2{\cdot}{u_n}^2}{1+2{\cdot}u_n} = \dfrac{2{\cdot}u_n - 2{\cdot}{u_n}^2}{1+2{\cdot}u_n}$
$= \dfrac{2{\cdot}u_n{\cdot}(1-u_n)}{1+2{\cdot}u_n}$

De la comparaison $u_n > 0$, on en déduit :
$1 + 2{\cdot}u_n > 0$

De la comparaison $u_n < 1$, on en déduit :
$1{-}u_n > 0 \implies 2{\cdot}u_n{\cdot}(1{-}u_n) > 0$

On en déduit la comparaison suivante :
$\dfrac{2{\cdot}u_n{\cdot}(1-u_n)}{1+2{\cdot}u_n} > 0$
$u_{n+1} - u_n > 0$
$u_{n+1} > u_n$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 16

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n :
$\mathcal{P}_n$: "pour tout nombre nombre réel x tel que $x > 0$, on a : $(1{+}x)^n \geqslant 1{+}n{\cdot}x$"

Etablissons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

- **Initialisation :**
  Soit x un nombre réel strictement positif :
  $(1+x)^0 = 1 \quad ; \quad 1 + 0{\times}x = 1$
  On vient d'établir la comparaison :
  $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0{\times}x$
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
  "Pour tout $x{\in}\mathbb{R}_+^*$: $(1{+}x)^n \geqslant 1{+}n{\cdot}x$"
  On a les comparaisons suivantes :
  $(1+x)^n \geqslant 1 + n{\cdot}x$
  Le nombre $1{+}x$ est positif :
  $(1+x)^n{\cdot}(1+x) \geqslant (1+n{\cdot}x){\cdot}(1+x)$
  $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + x + n{\cdot}x + n{\cdot}x^2$
  $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1){\cdot}x + n{\cdot}x^2$
  Or, le terme $n{\cdot}x^2$ est positif ou nul :
  $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1){\cdot}x$
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n{+}1$.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ a été initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on montre que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

2. Prenons un nombre réel q supérieur ou égal à 1. On peut écrire le nombre q sous la forme d'une somme :
$q = 1 + x \quad$ où $x \in \big]0\,;+\infty\big[$

A l'aide de l'inégalité de Bernoulli, on a l'inégalité :
$q^n = (1+x)^n \geqslant 1 + n{\cdot}x$

Or, on a la limite : $\lim_{n \mapsto +\infty} 1+n \cdot x = +\infty$.

D'après les théorèmes des comparaisons des limites, on obtient la limite :
$\lim_{n \mapsto +\infty} (1+x)^n = +\infty$
On en déduit : $\lim_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$

