T STi2D — **TD 5 - FONCTION EXPONENTIELLE** — **2022 - 2023**

EXERCICE 1 - BAC

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x}$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel x, on a :

$$e^{2x} - e^{x} = e^{x}(e^{x} - 1)$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe.

b. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Tracer la droite T et la courbe C_f .

EXERCICE 2 - BAC

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x} - 6$$

On note f' sa fonction dérivée sur IR.

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = e^{x}(2e^{x} - 1)$$

b. Étudier les variations de la fonction f sur Ψ.

2. a. Calculer la limite de f en $-\infty$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre en facteur le nombre e^{x} dans l'expression de $f(x)$).

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f.

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction f sur IR est égal à $\frac{-25}{4}$

c. D'après le tableau de variation de la fonction f, quel est le nombre de solutions sur Ψ de l'équation (E_1) suivante : (E_1) : $f(x) = 0$.

EXERCICE 3 - BAC

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels IR par :

$$f(x) = e^{-x} + 2x - 3.$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

On pourra établir au préalable que pour tout nombre réel x, $f(x) = e^{-x}(1 + 2xe^{x} - 3e^{x})$

2. Asymptote oblique

a. Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe (C).

b. Étudier la position relative de la droite (d) par rapport à la courbe (C).

3. Étude des variations de la fonction f

a. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = \frac{2e^{x} - 1}{e^{x}}$$

où f' est la dérivée de la fonction f.

b. Résoudre dans IR l'équation d'inconnue x :

$$f'(x) = 0$$

c. Etudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur IR.

d. Etablir le tableau de variations de la fonction f.

e. Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

4. Tracer la droite (d) et la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

EXERCICE 4 - BAC

Partie A - On note g la fonction définie sur l'ensemble IR des nombres réels par :

$$g(x) = e^{-x}(-3x + 1) + 1$$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur Ψ, et dresser le tableau de variation (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$).

3. Calculer $g(\frac{4}{3})$ et en déduire le signe de la fonction g sur Ψ.

Partie B - On considère maintenant la fonction f définie sur l'ensemble Ψ des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x}(3x + 2) + x$$

On note C sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

1. Étude des limites.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Étude des variations de f.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$, et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite D. (On notera A leur point d'intersection.)

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe C où la tangente T est parallèle à la droite D .

5. Tracer, dans le repère (O, I, J), les droites D et T . Placer les points A et B puis tracer la courbe C .